

1

Un recipiente cilindrico vuoto, di massa  $m$  ed aperto ad una estremità, viene immerso capovolto in acqua (densità  $\rho_w$ ) fino ad una profondità  $h$ , come illustrato in Fig. 1. L'aria che è presente nel recipiente rimane intrappolata subendo una compressione isoterma. Sapendo che il recipiente ha un diametro di  $D$  ed è alto  $b$ , determinare:

1. il volume dell'aria che rimane intrappolata (ossia calcolare  $h_a$ ); [10%]
2. la forza necessaria per mantenere il recipiente alla profondità  $h$ ; [5%]
3. l'andamento (in forma grafica) della pressione lungo la parete laterale interna del recipiente; [5%]
4. determinare la forza di pressione agente sulla parete laterale. [10%]

2

Una pompa ad attrito è costituita da due cilindri concentrici, aventi entrambi larghezza  $W$ , tra i quali fluisce una portata  $Q$  di fluido. Il cilindro esterno cavo, avente diametro  $2(R + h)$ , è fisso. Per movimentare il fluido, il cilindro interno, di raggio  $R$ , viene messo in moto con velocità angolare di rotazione  $\Omega$  in senso antiorario. Un setto separa il flusso in ingresso a pressione  $P_{in}$  dal flusso in uscita a pressione  $P_{out}$ .

1. Supponendo lo spessore  $h$  del meato tra i cilindri trascurabile rispetto al diametro  $D$ , determinare e disegnare graficamente il profilo di velocità del fluido. [20%]
2. Determinare la forza d'attrito prodotta dal fluido in corrispondenza delle pareti del meato tra i cilindri, e la potenza che è necessario fornire per mantenere il cilindro interno in rotazione alla velocità  $\Omega$ . [15%]

3

Per realizzare un impianto di climatizzazione è necessario progettare un sistema di manutenzione dotato di ugelli nebulizzatori. Tali ugelli vengono utilizzati per generare microgocce sferiche di liquido igienizzante necessarie a garantire le periodiche operazioni di pulizia dell'impianto. Una volta generate, le microgocce vengono iniettate all'interno delle condutture da igienizzare con velocità iniziale  $v_i$  e con diametro  $d_p$ . Supponendo che il moto delle microgocce avvenga nella sola direzione orizzontale (ovvero supponendo di trascurare l'effetto della gravità) ed in regime di Stokes ( $C_D = 24/Re_p$ ), si chiede di:

1. determinare una espressione per la *stopping distance* nell'ipotesi che la massa delle gocce non cambi durante il moto; [10%]
2. determinare una espressione per la *stopping distance* nell'ipotesi che, in particolari condizioni di elevata umidità, vi possa essere condensazione di vapor acqueo sulle gocce e che la massa delle gocce possa quindi aumentare durante il moto con tasso  $c = k\pi d_p^2 [kg/s]$  e  $k$  costante. [25%]

Figure

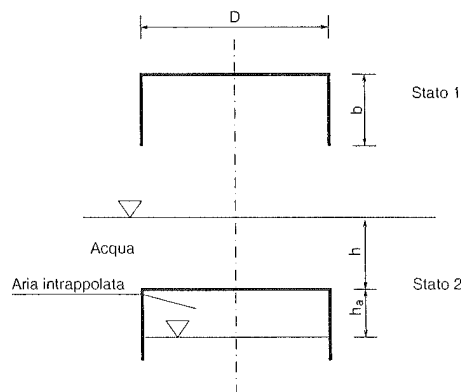


Fig. 1 Recipiente capovolto e immerso in acqua.

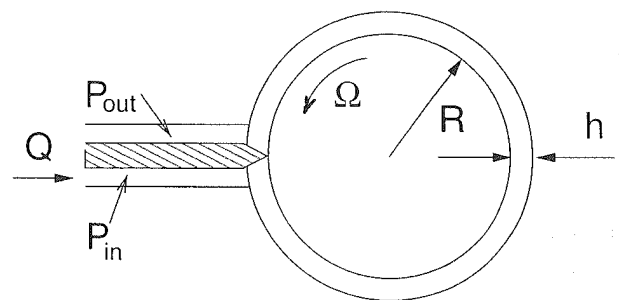


Fig. 2 Schema di pompa ad attrito.

Continuità:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0$ ; Navier-Stokes:  $\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$ ; Taglio:  $\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

Num. Reynolds e Forza di Drag per la particella:  $Re_p = \frac{\rho |\mathbf{v} - \mathbf{v}_p| D_p}{\mu}$ ,  $\mathbf{F}_D = \frac{1}{2} C_D \rho A_p (\mathbf{v} - \mathbf{v}_p) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_p|$

Legge di Stevino:  $dp = -\rho g dz$

26 NOVEMBRE 2010

## EXE 1

CALCOLO DI  $h_e$ :Compressione isoterma  $\Rightarrow pV = \text{cost} \Rightarrow P_1 V_1 = P_2 V_2$ con  $V_1 =$  volume d'aria nel bicchiere allo stato 1 $V_2 =$  " " " " " " " " 2Quindi:  $V_1 = \frac{\pi D^2}{4} \cdot b$  ;  $V_2 = \frac{\pi D^2}{4} \cdot h_e \Rightarrow P_1 \cdot b = P_2 \cdot h_e$ con  $P_1 = P_{\text{atm}}$ 

$$P_2 = P_{\text{atm}} + \rho_w g(h + h_e)$$

Sostituendo:  $P_{\text{atm}} \cdot b = [P_{\text{atm}} + \rho_w g(h + h_e)] \cdot h_e$ 

$$\cancel{\rho_w g h_e^2} + \frac{(P_{\text{atm}} + \rho_w g h) h_e}{\rho_w g} - \frac{P_{\text{atm}} \cdot b}{\rho_w g} = 0$$

Ponendo  $h_e = x$  e  $\frac{P_{\text{atm}}}{\rho_w g} = K =$  costante arbitraria:

$$x^2 + (K + h)x - K \cdot b = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(K+h) \pm \sqrt{(K+h)^2 + 4Kb}}{2} = \begin{cases} \frac{-(K+h) + \sqrt{(K+h)^2 + 4Kb}}{2} > 0 \\ \frac{-(K+h) - \sqrt{(K+h)^2 + 4Kb}}{2} < 0 \text{ NA} \end{cases}$$

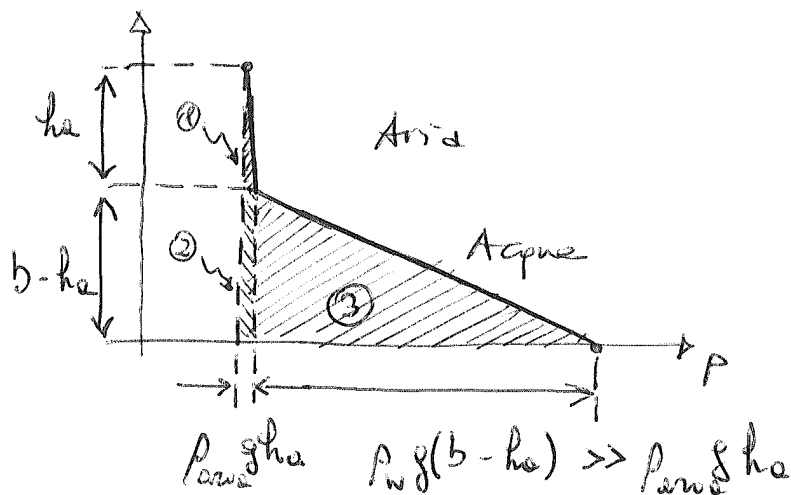
La soluzione è quindi:  $h_e = \frac{\sqrt{(K+h)^2 + 4Kb} - (K+h)}{2}$

$$F = F_{\text{spinta}} - F_{\text{peso}} = \rho_w g \frac{\pi D^2}{4} h_a - mg$$

$$F = \rho_w g \frac{\pi D^2}{4} h_a - mg$$

N.B. Ovviamente si deve ipotizzare  $F_{\text{spinta}} > F_{\text{peso}}$  altrimenti il recipiente resta "ancorato" al fondo a causa della propria massa  $m$ , ovvero del proprio peso  $mg$ .

ANDAMENTO GRAFICO DELLA PRESSIONE



L'incremento di pressione nello strato d'aria dentro il bicchiere è trascurabile rispetto all'incremento nello strato d'acqua.

CALCOLO DELLA FORZA DI PRESSIONE AGENTE SULLA P.I.

In 1D :

$$F_p = \underbrace{\rho_w g \frac{h_a \cdot h_a}{2}}_{\text{Area ①}} + \underbrace{\rho_w g h_a (b - h_a)}_{\text{Area ②}} + \rho_w g \frac{(b - h_a) \cdot (b - h_a)}{2}$$

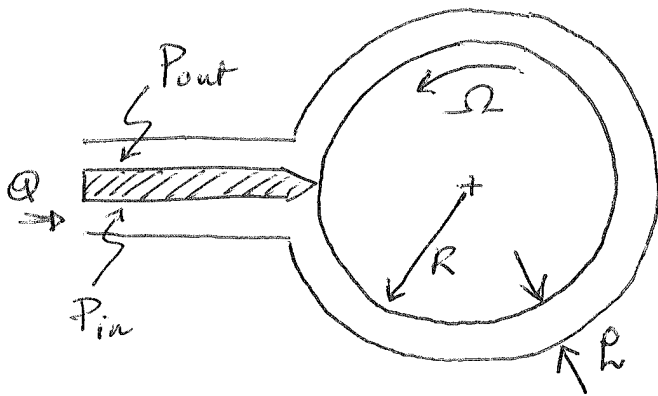
$$\frac{F_p}{W} \cong \frac{1}{2} \rho_w g (b - h_a)^2 \quad [N/m]$$

In 2D :

$$F_p = \frac{\rho_w g (b - h_a)^2}{2} \cdot \pi D$$

$\frac{\rho_w g (b - h_a)}{2}$  = PRESSIONE MEDIA NELLO STRATO DI H<sub>2</sub>O

$\pi D (b - h_a)$  = AREA LATO =  $\pi R^2$



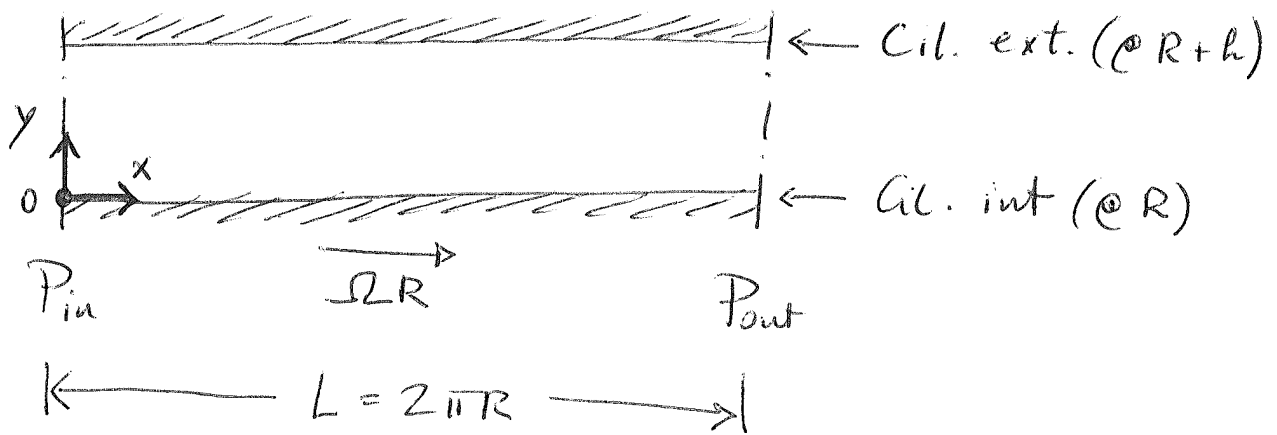
Poiché si tratta di una pompa, la pressione del fluido alla mandata,  $P_{out}$ , sarà maggiore della pressione all'aspirazione,  $P_{in}$ .

Il gradiente di pressione

$$\text{sarà quindi } \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_{out} - P_{in}}{2\pi R} > 0$$

Hp:  $h \ll R \Rightarrow$  Trascuro la curvatura dei cilindri

Il problema è equivalente al seguente schema:



Eq. di conservazione:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \Rightarrow v_x(y) = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) y^2 + C_1 y + C_2$$

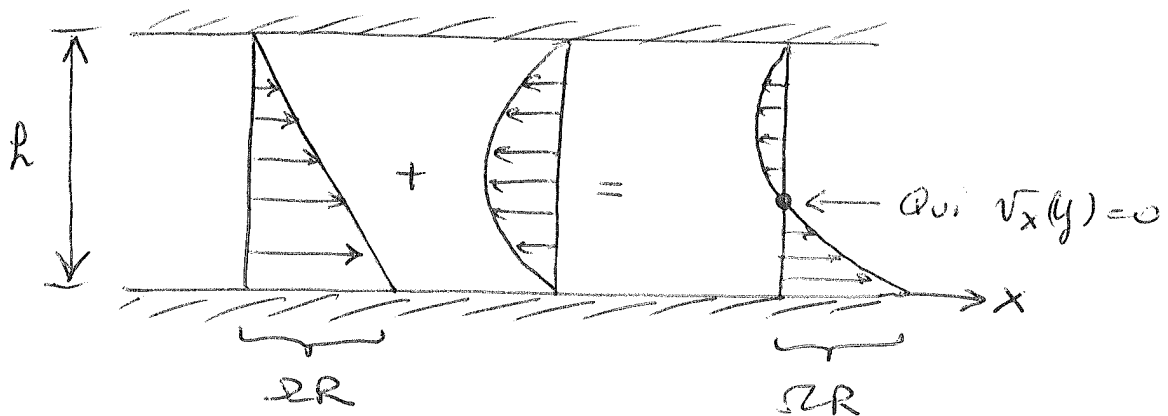
$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow P = P(x)$$

$$\text{C.C. \#1} \quad v_x(y=0) = \Omega R \quad \Rightarrow \quad C_2 = \Omega R$$

$$\text{C.C. \#2} \quad v_x(y=h) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) h - \frac{\Omega R}{h}$$

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - hy) - \frac{\Omega R}{h} (y - h)$$

$$\underbrace{\quad \geq 0 \quad \leq 0 \quad}_{\text{Poiseuille } (\leq 0)} \quad \underbrace{\quad \leq 0 \quad}_{\text{Couette } (\geq 0)}$$



Mettendo l'origine del riferimento cartesiano sulla parete del cilindro esterno invece che su quella del cilindro interno si trova:

$$\text{C.C. \#1} \quad v_x(y=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\text{C.C. \#2} \quad v_x(y=h) = \Omega R \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) h + \frac{\Omega R}{h}$$

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - hy) + \frac{\Omega R}{h} y$$

Calcolo della forza d'attrito e della potenza dissipata: 15

I° RIF (origine sul cil. interno):

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \left( y - \frac{R}{2} \right) - \frac{\mu \Omega R}{L}$$

$$\begin{aligned} \tau_w @ y=0 &= - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{R}{2} - \frac{\mu \Omega R}{L} \quad (*) \\ \tau_w @ y=R &= + \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{R}{2} + \frac{\mu \Omega R}{L} \quad (**) \end{aligned}$$

II° RIF (origine sul cilindro esterno)

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \left( y - \frac{R}{2} \right) + \frac{\mu \Omega R}{L}$$

(cambia segno rispetto a prima!)

$$\begin{aligned} \tau_w @ y=0 &= - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{R}{2} + \frac{\mu \Omega R}{L} \quad (***) \\ \tau_w @ y=R &= + \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{R}{2} + \frac{\mu \Omega R}{L} \quad (*) \end{aligned}$$

Cambiando riferimento, cambia il segno del taglio alle pareti dei due cilindri.

Per calcolare la forza d'attrito alle pareti basta determinare:

(i)  $F_\tau = |\tau_w| \cdot 2\pi R W$  parete cil. int.

$$(ii) \quad F_Z = |Z_w| \cdot 2\pi(R+h)W \quad \text{parete cil. est.}$$

Poiché  $h \ll R$  si ha che  $R+h \approx R$  e quindi la forza è praticamente la stessa alle due pareti.

In fine:

$$(iii) \quad \text{Pot} = F_Z \cdot \Omega R$$

$$\cong |Z_w| \cdot 2\pi R^2 W \Omega$$

### EXE 3

- Calcolo della STOPPING DISTANCE nel caso di massa costante:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_D + \vec{F}_P + \vec{F}_{gall}$$

$$m_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{1}{2} \rho C_D A_p |\vec{u} - \vec{v}_p| (\vec{u} - \vec{v}_p)$$

L'unica direzione di moto è quella orizzontale e quindi  $\vec{v}_p = v_p \vec{i}$ . Poiché inoltre il fluido è fermo ( $\vec{u} = \vec{0}$ ) si ha:

$$\rho_p \frac{\pi d_p^3}{6} \frac{dv_p}{dt} = \frac{1}{2} \rho \frac{24}{\frac{\rho |\vec{u} - \vec{v}_p| d_p}{\mu}} \cdot \frac{\pi d_p^2}{4} |\vec{u} - \vec{v}_p| (\vec{u} - \vec{v}_p)$$

$$\frac{dv_p}{dt} = - \frac{18\mu}{\rho_p d_p^2} v_p = - \frac{v_p}{\tau_p}$$

Separando le variabili:

$$\frac{dv_p}{v_p} = - \frac{dt}{\tau_p} \Rightarrow \int_{v_p(t=0) \equiv v_i}^{v_p(t)} \frac{dv_p}{v_p} = - \frac{1}{\tau_p} \int_0^t dt$$

$$\ln v_p \Big|_{v_i}^{v_p(t)} = - \frac{t}{\tau_p} \Rightarrow \boxed{v_p = v_i e^{-t/\tau_p}}$$

$$v_p \triangleq \frac{dX_p}{dt} \Rightarrow \int_{X_p(t=0)=0}^{X_p(t)} dX_p = \int_0^t v_p dt$$

$$X_p(t) = v_i \int_0^t e^{-t/\tau_p} dt = -v_i \tau_p e^{-t/\tau_p} \Big|_0^t$$

$$\boxed{X_p(t) = v_i \tau_p (1 - e^{-t/\tau_p})}$$

Orò  $v_p(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$ . Quando  $t \rightarrow \infty$ :

$$\boxed{X_{max} = X_p(t \rightarrow \infty) = v_i \tau_p} \quad \text{(STOPPING DISTANCE)}$$

• Calcolo a massa variabile:

$$\frac{dm_p}{dt} = m_{in} - m_{out} = C = K \pi d_p^2 \Rightarrow \frac{dm_p}{dt} = K \bar{u} d_p^2$$

$$m_p \triangleq \rho_p \frac{\pi d_p^3}{6} \Rightarrow \frac{dm_p}{dt} = \rho_p \frac{\bar{u}}{6} \frac{d d_p^3}{dt} = \rho_p \frac{\pi}{2} d_p^2 \frac{d d_p}{dt}$$

Uguagliando:  $K \pi d_p^2 = \rho_p \frac{\pi}{2} d_p^2 \frac{dd_p}{dt}$

$$\frac{dd_p}{dt} = \frac{2K}{\rho_p} \Rightarrow d_p(t) = \underbrace{d_p^{iniz.}}_{d_i} + \frac{2K}{\rho_p} t$$

$$\boxed{d_p(t) = d_i + \frac{2K}{\rho_p} t}$$

LEGGE DI VARIAZ.  
DEL DIAMETRO NEL TEMPO

Il bilancio di forze diventa:

$$F_I = F_D \Rightarrow m_p \frac{dv_p}{dt} + v_p \frac{dm_p}{dt} = -3\pi \mu v_p d_p$$

$$\frac{dv_p}{dt} = -v_p \frac{dm_p}{dt} \cdot \frac{1}{m_p} - \frac{3\pi \mu d_p v_p}{m_p} \quad \text{con } m_p = \rho_p \frac{\pi d_p^3}{6}$$

$$= -v_p K \pi d_p^2 \frac{1}{\rho_p \frac{\pi d_p^3}{6}} - \frac{3\pi \mu d_p v_p}{\rho_p \frac{\pi d_p^3}{6}}$$

$$= -v_p \left( \underbrace{\frac{6K}{\rho_p} \cdot \frac{1}{d_p}}_{\text{cost.} \equiv A} + \underbrace{\frac{18\mu}{\rho_p} \cdot \frac{1}{d_p^2}}_{\text{cost.} \equiv B} \right)$$

$$= -v_p \left( \frac{A}{d_p} + \frac{B}{d_p^2} \right)$$

Separando le variabili:

$$\frac{dv_p}{v_p} = - \left( \frac{A}{d_p} + \frac{B}{d_p^2} \right) dt$$

$$\int_{v_i}^{v_p(t)} \frac{dv_p}{v_p} = -A \int_0^t \frac{dt}{d_i} - B \int_0^t \frac{dt}{d_i^2}$$

$$\int_0^t \frac{dt}{\left(d_i + \frac{2k}{\rho_p} t\right)^2} = \int_0^t \frac{dt}{d_i + \frac{2k}{\rho_p} t} = \frac{\rho_p}{2k} \ln \left( d_i + \frac{2k}{\rho_p} t \right) \Big|_0^t$$

$$= -\frac{\rho_p}{2k} \left( d_i + \frac{2k}{\rho_p} t \right)^{-1} \Big|_0^t = \frac{\rho_p}{2k} \ln \left( \frac{d_i + \frac{2k}{\rho_p} t}{d_i} \right)$$

$$= -\frac{\rho_p}{2k} \left( \frac{1}{d_i + \frac{2k}{\rho_p} t} - \frac{1}{d_i} \right)$$

↔ Substitution

$$\ln \left[ \frac{v_p(t)}{v_i} \right] = - \underbrace{\frac{6k}{\rho_p} \left( -\frac{\rho_p}{2k} \right)}_{+3} \ln \left( \frac{d_i + \frac{2k}{\rho_p} t}{d_i} \right) - \frac{18\mu}{\rho_p} \left( -\frac{\rho_p}{2k} \right) \left( \frac{t}{d_i + \frac{2k}{\rho_p} t} \right) + \frac{9\mu}{k}$$

$$\cdot \left[ \frac{d_i - d_i - \frac{2k}{\rho_p} t}{d_i \left( d_i + \frac{2k}{\rho_p} t \right)} \right]$$

$$v_p(t) = v_i \cdot \exp \left\{ \ln \left( \frac{d_i + \frac{2k}{\rho_p} t}{d_i} \right)^3 - \frac{9\mu}{k} \cdot \frac{2k}{\rho_p d_i} \left( \frac{t}{d_i + \frac{2k}{\rho_p} t} \right) \right\}$$

$$\star = v_i \left( \frac{d_i + \frac{2k}{\rho_p} t}{d_i} \right)^3 \exp \left[ -\frac{18\mu}{\rho_p d_i} \left( \frac{t}{d_i + \frac{2k}{\rho_p} t} \right) \right]$$

Si nota come la velocità  $v_p(t)$  non si annulla 10  
per  $t \rightarrow \infty$  come nel caso a massa variabile.

A causa della condensazione, la goccia aumenta il proprio diametro nel tempo. Aumenta quindi la superficie offerta dalle gocce  $\left[ \frac{\pi d_p^2}{4} \right]$  e di conseguenza aumenta più rapidamente la forza di attrito rispetto al caso con massa costante.

Ciò implica che la goccia su cui c'è condensazione si ferma prima e che la sua stopping distance si riduce rispetto al caso a massa costante.

Dalla eq.  $\textcircled{4}$  si ricava il tempo  $t^*$  necessario ad annullare  $v_p(t)$ . Poi si sfrutta la relaz.  $v_p(t) = dx_p(t)/dt$  per ricavare  $x_p(t)$  tramite integrazione della  $\textcircled{4}$ . Infine la stopping distance sarà  $x_{\max} = x_p(t^*)$ .

I calcoli li lascio agli uomini di buona volontà!!

