FLUIDODINAMICA - AA 2009/2010

Primo Compito Intermedio - Durata 2 ore - Libri Chiusi

26 Novembre 2009

1

Una boa cubica di lato L [m] è costituita da un materiale di densità ρ [kg/m^3]. Quando completamente immersa in olio, la boa è trattenuta al fondo da una fune che esercita una tensione T [N] come schematizzato dalla configurazione di equilibrio 1 in Fig. 1.

1. Noti L, ρ e la densità dell'olio, $\rho_o > \rho$, calcolare l'espressione della tensione T. [15%]
2. Calcolare la posizione di equilibrio della boa (ovvero derivare un'espressione per x) quando, senza alcuna fune, si trova all'interfaccia tra olio e benzina (come schematizzato dalla configurazione di equilibrio 2 in Fig. 1). Si supponga nota la densità della benzina ($\rho_b < \rho$). [15%]

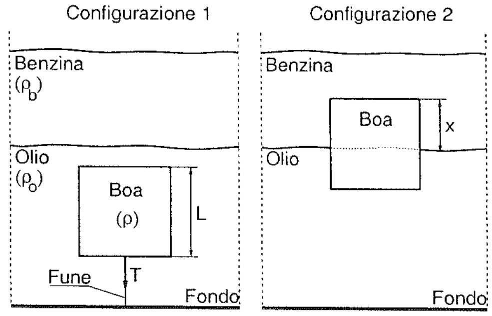


Fig. 1 Boa

2

Fumi (densità ρ, viscosità μ) provenienti da un bruciatore e contenenti particelle di materiale incombusto (diametro D_p, densità $\rho_p > \rho$) devono essere purificati prima di essere liberati in atmosfera. Allo scopo, viene utilizzato una ciminiera avente altezza H all'interno della quale la velocità ascendente dei fumi è diretta verso l'alto ed ha modulo pari a v. Ipotizzando che le particelle si muovano in regime di Stokes ($C_D = 24/Re_p$) e che alla base della ciminiera queste abbiano la stessa velocità dei fumi, si chiede di:

1. determinare l'espressione della velocità terminale delle particelle; [15%]
2. ricavare un'espressione che consenta di dimensionare l'altezza H della ciminiera facendo in modo che le particelle non possano uscire. [20%]

3

Un fluido Newtoniano incomprimibile scorre tra due pareti piane parallele, aventi lunghezza L, larghezza W e poste a distanza H. Le pareti sono inclinate di un angolo β rispetto all'orizzontale, come mostrato in Fig. 2. La parete superiore del canale si muove con velocità costante U mentre la parete inferiore è ferma. Utilizzando il sistema di riferimento Cartesiano indicato in Fig. 2, si chiede di:

1. determinare l'espressione del profilo di velocità del fluido tra le pareti del canale e disegnarne l'andamento in forma grafica; [15%]
2. determinare l'espressione per la velocità U che è necessario imporre alla parete superiore per annullare la portata volumetrica netta trasferita; [10%]
3. determinare la potenza teorica che deve essere spesa per mantenere la parete superiore in movimento alla velocità U calcolata al punto precedente. [10%]

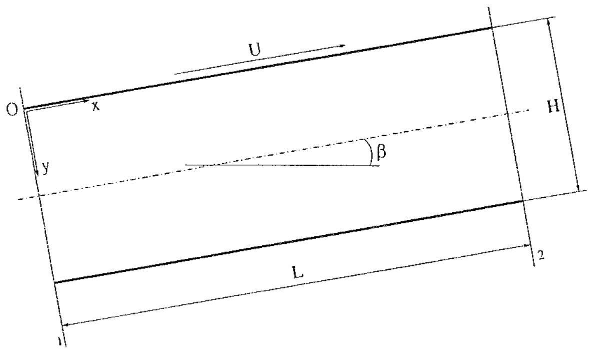
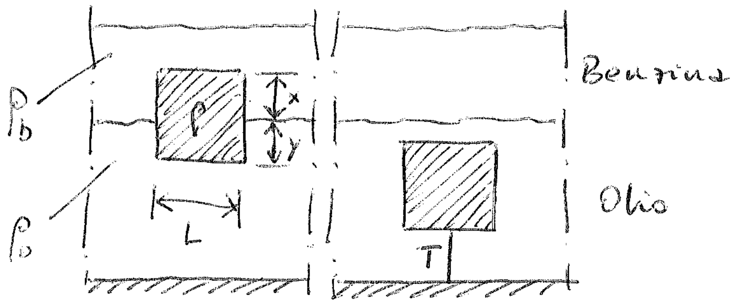


Fig. 2 Flusso unidirezionale in canale piano.

Continuità: $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$; *Navier-Stokes:* $\rho\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right)$; *Sforzo di taglio:* $\tau_{ij} = \mu\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

Num. Reynolds e Forza di Drag per la particella: $Re_p = \dfrac{\rho|\mathbf{v} - \mathbf{v}_p|D_p}{\mu}$, $\mathbf{F}_D = \dfrac{1}{2}C_D\rho A_p(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p)|\mathbf{v} - \mathbf{v}_p|$

EXE 1



CONFIGURAZIONE 1 : $\vec{F}_{peso} + \vec{F}_{gall} + \vec{T} = \vec{0}$

In modulo : $T = F_{peso} - F_{gall} = mg - \rho_o g V =$

$\stackrel{!}{=} (\rho - \rho_o) g L^3 < 0$ (diretta verso il basso!)

CONFIGURAZIONE 2 : $\vec{F}_{peso} + \vec{F}_{gall} = \vec{0}$

In modulo : $F_{gall} = F_{peso} \Rightarrow \rho_o \cancel{L^2}(L - x)\cancel{g} + \rho_b \cancel{L^2} x \cancel{g} = \rho \cancel{g} L^{\cancel{3}}$

$$\rho_o L + (\rho_b - \rho_o) x = \rho L$$

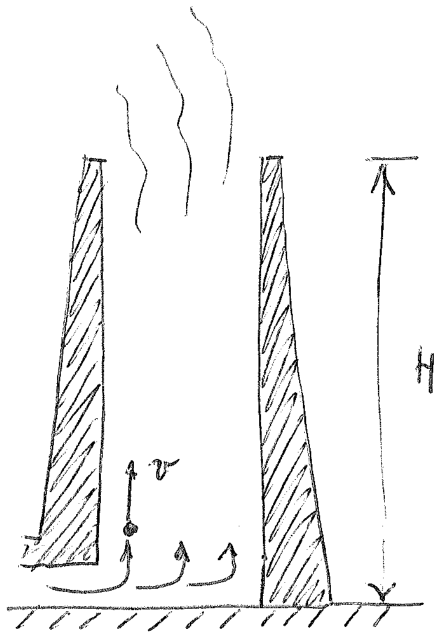
$$x = \frac{(\rho - \rho_o) L}{\rho_b - \rho_o} \quad \text{con } \rho - \rho_o < 0 \text{ e } \rho_b - \rho_o < 0$$

In sintesi : $\boxed{T = (\rho - \rho_o) g L^3}$ [15%] $\boxed{x = \frac{\rho_o - \rho}{\rho_o - \rho_b} \cdot L}$ [15%]

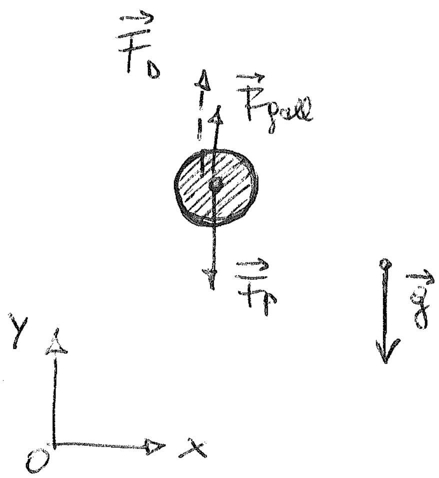
$$y = L - x = L\left(\frac{\cancel{\rho_o} - \rho_b - \cancel{\rho_o} + \rho}{\rho_o - \rho_b}\right)$$

$$\boxed{y = \left(\frac{\rho - \rho_b}{\rho_o - \rho_b}\right) \cdot L} \quad [15\%]$$

EXE 2



Le particelle di materiale incombusto si muovono verticalmente verso l'alto con $v_p(t=0) = v$ [vel. iniziale]. Sulle particelle agisce la forza di gravità, che si oppone alla loro risalita. Inizialmente, le particelle salgono per effetto dell'inerzia posseduta. Poi la gravità prevale e le particelle iniziano a muoversi verso il basso.



Dal bilancio di forze agenti sulla singola particella si ricava:

$$\frac{dv_p}{dt} = \frac{v - v_p}{\tau_p} + \hat{\rho} g \quad (1)$$

con $\hat{\rho} = (\rho - \rho_p)/\rho_p < 0$

La velocità terminale rappresenta la soluzione particolare dell'Eq. (1) ovvero:

$$\boxed{v_p^{term} = v + \hat{\rho} g \tau_p}$$

La velocità della particella al variare del tempo t si ricava dall'integrazione della Eq. (1):

$$\int_{v}^{v_p(t)} \frac{d v_p}{\frac{v - v_p}{\tau_p} + \hat{\rho} g} = \int_0^t dt \Rightarrow \int_{z_1}^{z_2} -\tau_p \frac{dz}{z} = t \Rightarrow \ln z \Big|_{z_1}^{z_2} = -t/\tau_p$$

$$\boxed{\frac{v - v_p}{\tau_p} + \hat{\rho} g = z \Rightarrow d v_p = -\tau_p \, dz}$$

$$\ln \left[\frac{\frac{v - v_p(t)}{\tau_p} + \hat{\rho} g}{\cancel{\frac{v - v}{\tau_p}}^{\,0} + \hat{\rho} g} \right] = -t/\tau_p \Rightarrow \frac{v - v_p}{\tau_p} + \hat{\rho} g \Big/ \hat{\rho} g = e^{-t/\tau_p}$$

$$\frac{v - v_p(t)}{\tau_p} = \hat{\rho} g \left(e^{-t/\tau_p} - 1 \right) \Rightarrow \boxed{v_p(t) = v + \hat{\rho} g \tau_p \left(1 - e^{-t/\tau_p} \right)}$$

Nel limite $t \to \infty$: $v_p(t) = v + \hat{\rho} g \tau_p = v_p^{term}$!

$$\cancel{X}_p(t) = \int_0^t v_p(t)\, dt = v \cdot t + \hat{\rho} g \tau_p \underbrace{\int_0^t \left(1 - e^{-t/\tau_p} \right) dt}_{t + \tau_p e^{-t/\tau_p} \big|_0^t}$$

$$= v \cdot t + \hat{\rho} g \tau_p \cdot t + \hat{\rho} g \tau_p^2 \left(e^{-t/\tau_p} - 1 \right)$$

$$\boxed{Y_p(t) = \underbrace{(v + \hat{\rho} g \tau_p)}_{v^{term}} \cdot t - \hat{\rho} g \tau_p^2 \left(1 - e^{-t/\tau_p} \right)} \quad (2)$$

Le particelle continuano a salire lungo la ciminiera finché $v_p(t^*)=0$. Il tempo t^* di risalita sarà allora:

t^* tale che $v_p(t^*)=0 \Rightarrow 0 = v + \hat{\rho} g \tau_p (1 - e^{-t^*/\tau_p})$

$$\boxed{(1 - e^{-t^*/\tau_p}) = -\frac{v}{\hat{\rho} g \tau_p}} \quad (A)$$

$$e^{-t^*/\tau_p} = 1 + \frac{v}{\hat{\rho} g \tau_p}$$

$$-t^*/\tau_p = \ln\left(1 + \frac{v}{\hat{\rho} g \tau_p}\right)$$

$$\boxed{t^* = -\tau_p \ln(\ldots)} \quad (B)$$

Sostituendo (A) e (B) nell'Eq. (2) si ha, per $y_p(t^*)=H$:

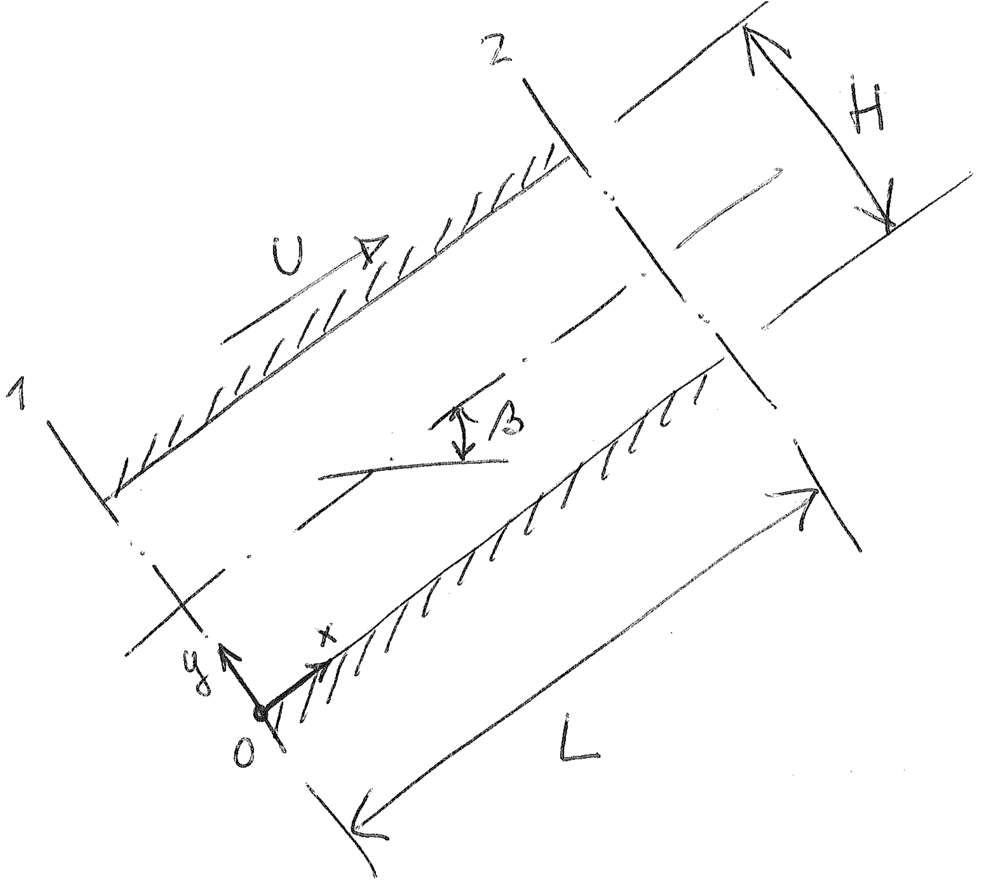
$$H = (v + \hat{\rho} g \tau_p)\left[-\tau_p \ln(\ldots)\right] - \cancel{\hat{\rho} g \tau_p^2}\left(-\frac{v}{\cancel{\hat{\rho} g \tau_p}}\right)$$

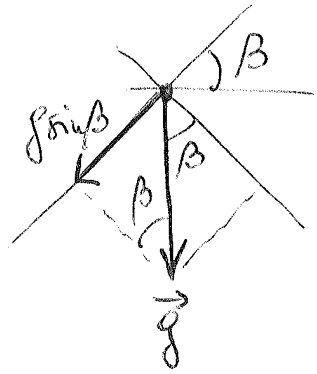
$$= (v + \hat{\rho} g \tau_p)\left[-\tau_p \ln(\ldots)\right] + v \tau_p$$

$$\boxed{H = (v + \hat{\rho} g \tau_p) \ln\left(1 + \frac{v}{\hat{\rho} g \tau_p}\right)^{-\tau_p} + v \tau_p} \quad (3)$$

L'Eq. (3) consente di dimensionare l'altezza H della ciminiera in base al τ_p delle particelle.

EXE 3





Ipotesi: $\frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0$

$\frac{\partial \cdot}{\partial z} = 0$

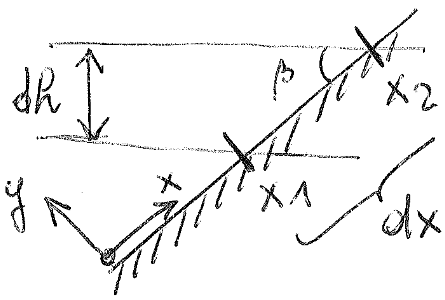
$v_x \neq 0 \,,\; v_y = v_z = 0$

Cont. $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$

NS$_x$ $0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$

NS$_y$ $0 = -\frac{\partial P}{\partial y}$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \underbrace{\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}}}_{=0} + \rho g \frac{\partial h}{\partial x}$$



$$\frac{\partial h}{\partial x} \simeq \frac{dh}{dx} = \sin\beta \;(>0)$$

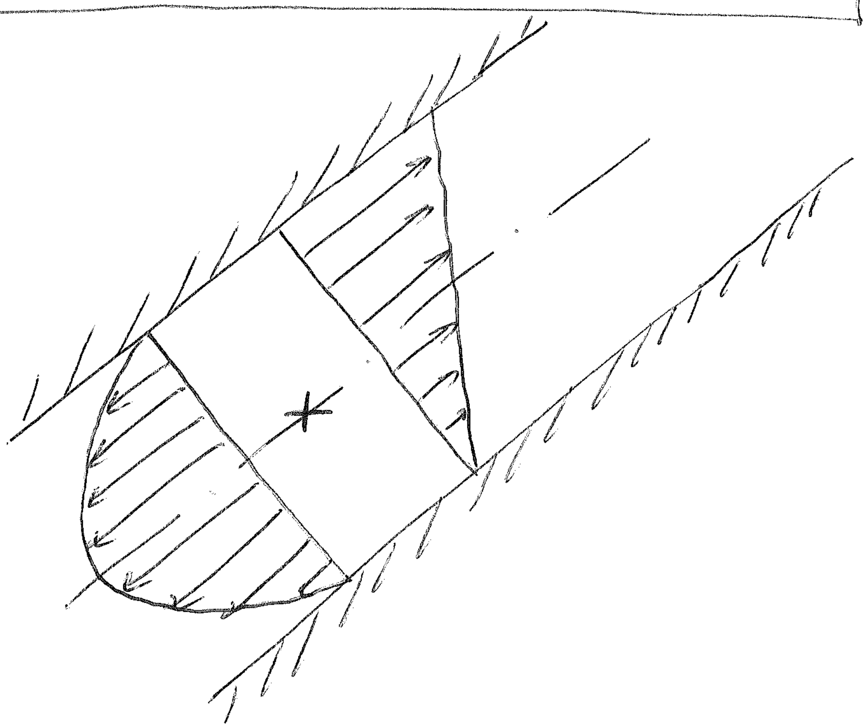
$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \sin\beta (>0)$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \rho g \sin\beta \Longrightarrow v_x(y) = \frac{1}{2\mu}(\rho g \sin\beta)\, y^2 + C_1 y + C_2$$

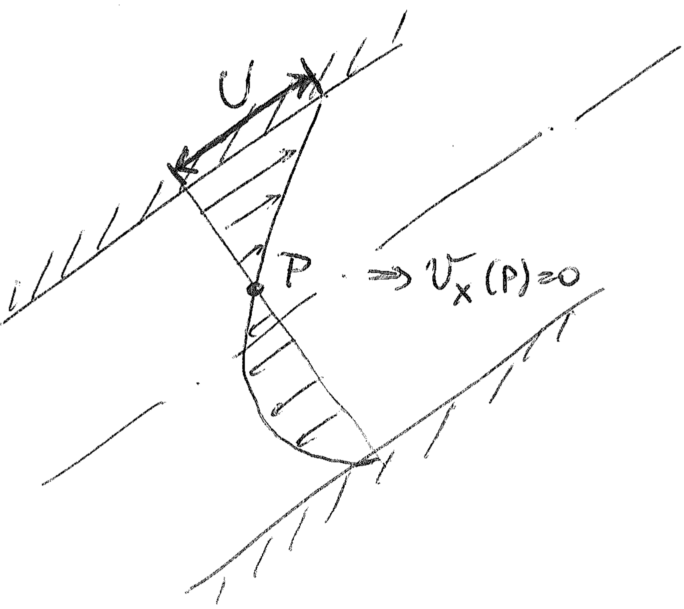
C.C. #1 $\quad v_x(y=0)=0 \Rightarrow C_2 = 0$

C.C. #2 $\quad v_x(y=H)=U \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2\mu}(\rho g \sin\beta) H + \frac{U}{H}$

$$\boxed{v_x(y) = \frac{1}{2\mu}(\rho g \sin\beta)(y^2 - Hy) + \frac{U}{H} y} \quad (A)$$



$\Downarrow$



N.B. Con origine sulla parete superiore :

C.C. #1 $\quad v_x(y=0)=U \quad \Rightarrow \quad U = C_2$

C.C. #2 $\quad v_x(y=H)=0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2\mu}(\rho g \sin\beta) H^2 + C_1 H + U$

$$C_1 = -\frac{1}{2\mu}(\rho g \sin\beta) H - \frac{U}{H}$$

$$\boxed{v_x(y) = \frac{1}{2\mu}(\rho g \sin\beta)(y^2 - Hy) + U\left(1 - \frac{y}{H}\right)} \quad (B)$$

Calcolo delle portate:

$$\frac{Q}{W} = \int_0^H v_x^{(A)}(y)\,dy \overset{(A)}{=} \frac{1}{2\mu}(\rho g \sin\beta)\left(\frac{y^3}{3} - H\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^H + \frac{U}{H}\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^H$$

$$= \frac{1}{2\mu}(\rho g \sin\beta)\left(-\frac{H^3}{6}\right) + \frac{U}{H}\frac{H^2}{2}$$

$$= -\frac{1}{12\mu}\rho g \sin\beta\, H^3 + \frac{UH}{2}$$

$$= \int_0^H v_x^{(B)}(y)\,dy \overset{(B)}{=} \frac{1}{2\mu}(\rho g \sin\beta)\left(\frac{y^3}{3} - H\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^H + \underbrace{U\left(y - \frac{1}{H}\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^H}_{H - H/2}$$

$$= -\frac{1}{12\mu}(\rho g \sin\beta) H^3 + \frac{UH}{2} \qquad \text{ok!}$$

$$\frac{Q}{W} = 0 \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{12\mu}(\rho g \sin\beta) H^3 \cdot \frac{2}{H}$$

$$= \frac{1}{6\mu}(\rho g \sin\beta) H^2$$

$$\boxed{U = \frac{\rho g \sin\beta}{6\mu} H^2}$$ Velocità che annulla $\frac{Q}{W}$

Nota: $\frac{Q}{W} = -\frac{1}{12\mu}(\rho g \sin\beta) H^3 + \frac{UH}{2}$

$$\frac{d(Q/W)}{dH} = -\frac{1}{4\mu}(\rho g \sin\beta) H^2 + \frac{U}{2} = 0 \quad \text{se} \quad H = \sqrt{\frac{U}{2} \cdot \frac{4\mu}{\rho g \sin\beta}}$$

ovvero se: $$\boxed{H = \sqrt{\frac{2\mu U}{\rho g \sin\beta}}}$$ $\left[\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m}s} \cdot \frac{\cancel{m}}{\cancel{s}} \cdot \frac{m^{3^2}}{\cancel{kg}} \cdot \frac{s^2}{\cancel{m}}\right]$

Calcolo della potenza:

$$Pot = F \cdot U = \tau_w \cdot LWU = \left.\frac{\partial U_x}{\partial y}\right|_{y=H} \mu LWU$$

$$\left.\frac{\partial U_x}{\partial y}\right|_{y=H} \overset{A}{=} \frac{1}{2\mu}(\rho g \sin\beta)\underbrace{(2y - H)\Big|_{y=H}}_{H} + \frac{U}{H} = \frac{\rho g \sin\beta}{2\mu} H + \frac{U}{H}$$

$$\boxed{Pot = \left(\frac{\rho g \sin\beta}{2\mu} H + \frac{U}{H}\right)\mu L W U} \quad (A')$$

N.B. Con origine sulla parete superiore:

$$Pot = \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0} \mu L W U$$

$$\left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0} \overset{(B)}{=} \frac{1}{2\mu}(\rho g \sin\beta)\underbrace{(2y - H)\Big|_{y=0}}_{-H} + U\left(-\frac{1}{H}\right)$$

$$= -\frac{\rho g \sin\beta}{2\mu} H - \frac{U}{H}$$

$$\boxed{Pot = -\left(\frac{\rho g \sin\beta}{2\mu} H + \frac{U}{H}\right)\mu L W U} \quad \text{(cambia solo il segno)}$$

(B')

Da (A') con $U = \frac{\rho g \sin\beta}{6\mu} H^2 \Rightarrow Pot = \left(\frac{\rho g \sin\beta}{2\mu} H + \frac{\rho g \sin\beta}{6\mu} H\right) \cdot \mu L W U$

POTENZA TEORICA $\boxed{Pot = \frac{2}{3}\frac{\rho g \sin\beta}{\mu} \mu L W H U} \Rightarrow \boxed{Pot = \frac{(\rho g \sin\beta)^2 L W H^3}{9\mu}}$

Da (B') con $H = \sqrt{\frac{2U\mu}{\rho g \sin\beta}} \Rightarrow Pot = -\left(\frac{\rho g \sin\beta}{2\mu}\sqrt{\frac{2\mu U}{\rho g \sin\beta}} + \right.$

$$\left. + U\sqrt{\frac{\rho g \sin\beta}{2\mu U}}\right)\mu L W U$$

$$Pot = -\left(\sqrt{\frac{\cancel{2\mu U}}{\cancel{\rho g \sin\beta}}\cdot\left(\frac{\rho g \sin\beta}{2\mu}\right)^{\cancel{2}}} + \sqrt{\frac{\rho g \sin\beta}{2\mu}\cdot U^{\cancel{2}}}\right)\mu LWU$$

$$= -2\sqrt{\frac{\rho g \sin\beta}{2\mu}U}\cdot\mu LWU$$

$$Pot = -\sqrt{\frac{2\rho g \sin\beta}{\cancel{\mu}}U}\,\mu LWU$$

$$\boxed{Pot = -\sqrt{2\mu\rho g \sin\beta U}\; LWU}$$

$$W = \frac{J}{s} = \frac{N\cdot m}{s} = kg\frac{m}{s^2}\cdot\frac{m}{s} = kg\frac{m^2}{s^3}$$

$$\underbrace{\left[\frac{kg}{ms}\cdot\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{mm}{s^2 s}\right]^{1/2}}_{\left[\frac{kg^2}{m^2 s^4}\right]^{1/2}}\cdot\underbrace{m\cdot m\cdot\frac{m}{s}}_{\frac{m^3}{s}} \rightarrow \left[\frac{kg^2}{m^2 s^4}\cdot\frac{m^6}{s^2}\right]^{1/2}$$

$$\left[\frac{kg^2}{\cancel{m^2} s^4}\cdot\frac{m^{\cancel{6}\,4}}{s^3}\right]^{1/2} = \left[kg\frac{m^2}{s^3}\right] = [W] \text{ ok!}$$