FLUIDODINAMICA - AA 2012/2013

Prima prova intermedia - Durata 2 ore - Libri chiusi

06 Dicembre 2012

1

Un umidificatore è costituito da un atomizzatore a disco (di raggio R) che ruota a velocità angolare Ω costante. Sull'atomizzatore viene alimentato il liquido da utilizzare per l'umidificazione. Per effetto centrifugo, dal bordo del disco si staccano orizzontalmente gocce aventi diametro D_p e velocità tangenziale iniziale $v_i = \Omega R$. Si trascurino le forze di gravità e di galleggiamento e si ipotizzi che le gocce si muovano in regime di Stokes ($C_D = 24/Re_p$).

1. Calcolare il valore di Ω che consente alle gocce di coprire una distanza orizzontale $x_p^{max} = L$ (pari alla *stopping distance*). Ipotizzare massa della goccia costante. [15%]
2. Dal momento in cui le gocce si staccano dal disco, il liquido evapora con tasso di evaporazione $c = k\pi D_p^2$ (con $D_p = D_p(t)$ diametro della goccia e k costante espressa in kg/m^2s). Indicato con D_i il diametro iniziale delle gocce, determinare la velocità di queste ultime quando il loro diametro si è ridotto a $0.5D_i$. [20%]

2

Un recipiente cilindrico vuoto, di massa m ed aperto ad una estremità , viene immerso capovolto in acqua (densità ρ_w) fino ad una profondità h, come illustrato in Fig. 1. L'aria che è presente nel recipiente rimane intrappolata. Sapendo che il recipiente ha un diametro di D ed è alto b, determinare:

1. il volume dell'aria che rimane intrappolata (ossia calcolare h_a);
[Suggerimento: ipotizzare che l'aria contenuta nel recipiente chiuso subisca una compressione isoterma.] [10%]
2. la forza necessaria per mantenere il recipiente alla profondità h; [5%]
3. l'andamento (in forma grafica) della pressione lungo la parete laterale interna del recipiente; [5%]
4. determinare la forza di pressione agente sulla parete laterale. [10%]

3

Una pompa ad attrito è costituita da due cilindri concentrici, aventi entrambi larghezza W, tra i quali fluisce una portata Q di fluido. Il cilindro esterno cavo, avente raggio $R+h$, è fermo. Per movimentare il fluido, il cilindro interno, di raggio R, viene messo in moto con velocità angolare di rotazione Ω in senso antiorario. Un setto separa il flusso in ingresso a pressione $\mathcal{P}_{in}$ dal flusso in uscita a pressione $\mathcal{P}_{out}$.

1. Supponendo lo spessore h del meato tra i cilindri trascurabile rispetto al raggio R, determinare e disegnare graficamente il profilo di velocità del fluido. [20%]
2. Determinare la forza d'attrito prodotta dal fluido in corrispondenza dei due cilindri, e la potenza che è necessario fornire per mantenere il cilindro interno in rotazione alla velocità Ω. [15%]

Figure

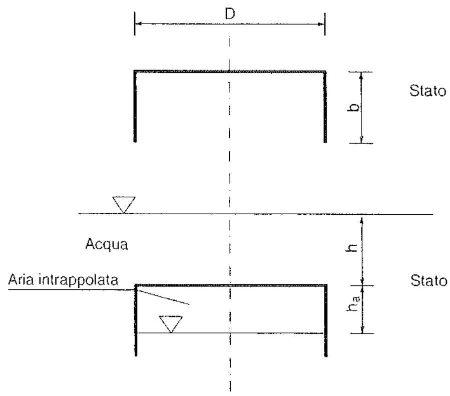


Fig. 1 Recipiente capovolto e immerso in acqua.

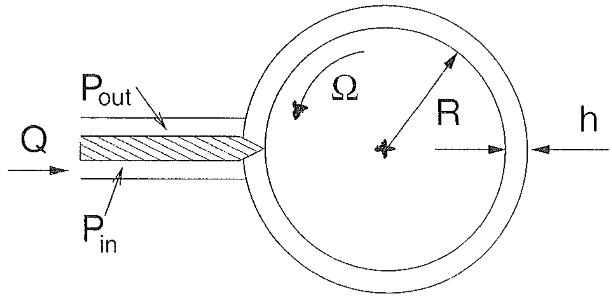


Fig. 2 Schema di pompa ad attrito.

Continuità $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ *Navier-Stokes* $\rho\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right)$

Num. Reynolds e Forza di Drag per la sfera: $Re_p = \dfrac{\rho D_p|\mathbf{u} - \mathbf{v}_p|}{\mu}$, $\mathbf{F}_D = \dfrac{1}{2}C_D\rho A_p(\mathbf{u} - \mathbf{v}_p)|\mathbf{u} - \mathbf{v}_p|$

1.2) Massa variabile:

$$m_p = \rho_p \frac{\pi D_p^3}{6} \Rightarrow \frac{dm_p}{dt} = \frac{\rho_p \pi}{2} D_p^2 \frac{dD_p}{dt} \quad (1)$$

Vale anche:

$$\frac{dm_p}{dt} = \cancel{\dot{m}_{in}}^{\,0} - \dot{m}_{out} = -c$$

$$\stackrel{!}{=} -K \pi D_p^2 \quad (2)$$

Eguagliando le eq. (1) e (2):

$$\rho_p \frac{\pi}{2} \cancel{D_p^2} \frac{dD_p}{dt} = -K\pi \cancel{D_p^2} \Rightarrow \boxed{\frac{dD_p}{dt} = -\frac{2K}{\rho_p}}$$

ovvero: $\boxed{dt = -\frac{\rho_p}{2k} dD_p}$ ⊛

Il bilancio di forze diventa:

$$F_{D,x} = F_{I,x} \Rightarrow -3\pi\mu v_{p,x} D_p = m_p \frac{dv_{p,x}}{dt} + v_{p,x} \frac{dm_p}{dt}$$

$$\frac{dv_{p,x}}{dt} = \frac{1}{m_p}\left[-3\pi\mu v_{p,x} D_p + \frac{dm_p}{dt} v_{p,x}\right]$$

$$\stackrel{!}{=} \left(-\frac{18\mu}{\rho_p} \cdot \frac{1}{D_p^2} - \frac{K\pi \cancel{D_p^2}}{\rho_p \frac{\pi D_p^{\cancel{3}}}{6}}\right) v_{p,x}$$

$$\frac{dv_{p,x}}{v_{p,x}} = \left(-\frac{18\mu}{\rho_p} \cdot \frac{1}{D_p^2} - \frac{6K}{\rho_p} \cdot \frac{1}{D_p}\right) \cancel{dt} \overset{⊛}{\left(-\frac{\rho_p}{2k} dD_p\right)}$$

$$\int_{v_i}^{v_{p,x}(t)} \frac{dv_{p,x}}{v_{p,x}} = \int_{D_i}^{D_p(t)} \left(\frac{9\mu}{K} \cdot \frac{1}{D_p^2} - 3 \cdot \frac{1}{D_p} \right) dD_p$$

$$\ln\left[\frac{v_{p,x}(t)}{v_i}\right] = \frac{9\mu}{K}\left(-\frac{1}{D_p}\right)\Bigg|_{D_i}^{D_p(t)} - 3 \ln D_p \Bigg|_{D_i}^{D_p(t)}$$

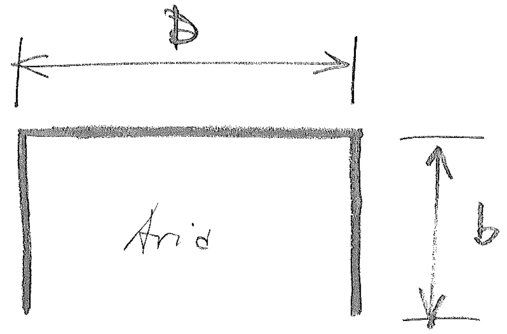
$$\boxed{v_{p,x}(t) = v_i \cdot \left[\frac{D_p(t)}{D_i}\right]^{-3} \cdot \exp\left[\frac{9\mu}{K}\left(-\frac{1}{D_p(t)} + \frac{1}{D_i}\right)\right]}$$

Se $D_p(t) = 0.5\,D_i$ allora:

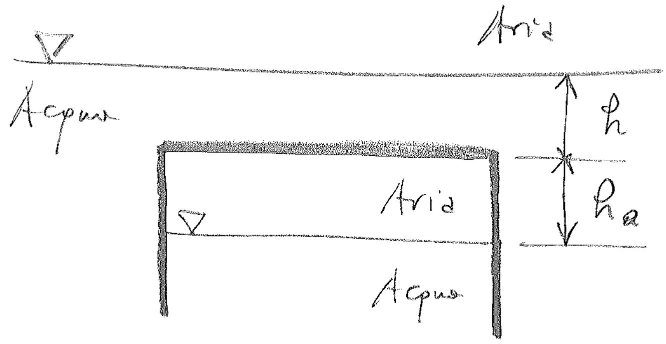
$$v_{p,x}(t) = v_i \cdot (0{,}5)^{-3} \cdot \exp\left[\frac{9\mu}{K}\left(-\frac{2}{D_i} + \frac{1}{D_i}\right)\right]$$

$$\boxed{v_{p,x}(t) = 8 v_i \cdot \exp\left(-\frac{18\mu}{K D_i}\right)}$$ [20%]

EXE 2



2.1) Ipotizziamo che l'aria subisca una compressione isoterma ($pV = cost$)



$$P_{in} V_{in} = P_{fin} V_{fin}$$

con $P_{in} = P_{atm}$

$V_{in} = S \cdot b$

$S = \pi D^2/4$

$V_{fin} = S \cdot h_a$

Avremo : $P_{fin} = P_{atm} \cdot \frac{\cancel{S} \cdot b}{\cancel{S} \cdot h_a}$

$$= P_{atm} \left(\frac{b}{h_a}\right) \quad [1]$$

Dalla statica : $P_{fin} = P_{atm} + \rho_w g (h + h_a) \quad [2]$

Eguagliando le eq. [1] e [2]:

$$P_{atm} + \rho_w g (h + h_A) = P_{atm} \cdot \left(\frac{b}{h_a}\right)$$

$$\rho_w g h_A^2 + (\rho_w g h + P_{atm}) h_A - P_{atm} \cdot b = 0$$

$$h_A^2 + \left(h + \frac{P_{atm}}{\rho_w g}\right) h_A - \frac{P_{atm} \cdot b}{\rho_w g} = 0$$

L'equazione è del tipo:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

con $A = 1$

$B = h + \frac{P_{atm}}{\rho_w g}$

$C = -\frac{P_{atm} \cdot b}{\rho_w g}$ $\Rightarrow$ $h_{A_{1,2}} = \frac{-\left(h + \frac{P_{atm}}{\rho_w g}\right) \pm \overbrace{\sqrt{(B)^2 - 4C}}^{>B!}}{2}$

$X = h_A$

Accetto la soluzione: $\boxed{h_A = \frac{-\left(h + \frac{P_{atm}}{\rho_w g}\right) + \sqrt{B^2 - 4C}}{2}}$

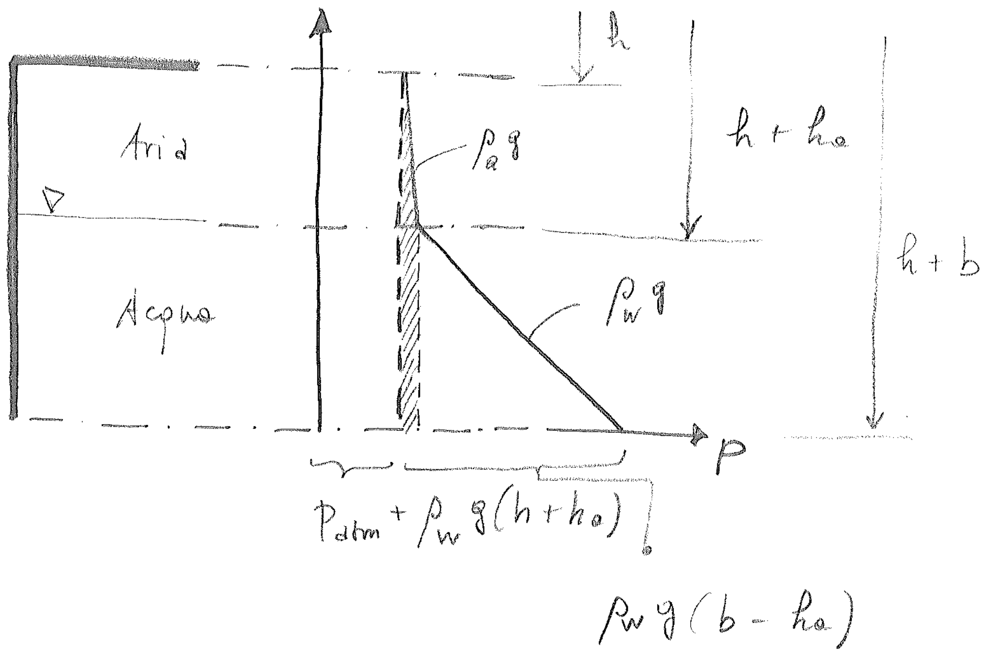
con $B^2 - 4C = \left(h + \frac{P_{atm}}{\rho_w g}\right)^2 + 4\frac{P_{atm} \cdot b}{\rho_w g}$ NOTO!

2.2) In condizioni statiche $\vec{F}_p + \vec{F}_{gall} = \vec{0}$ con

$F_p = m \cdot g$, $F_{gall} = \rho_w \cdot g \cdot V_{aria} = \rho_w g S \cdot h_a$

- Se $F_p = F_{gall}$ ovvero se $h_a = \frac{m}{\rho_w S}$ allora non serve applicare alcuna forza perché il sistema è "naturalmente" in equilibrio.
- Se $F_p > F_{gall}$ il recipiente affonda
- Se $F_p < F_{gall}$ la forza da applicare per impedire che il recipiente galleggi è $F = F_{gall} - F_p$ ovvero $\boxed{F = \rho_w g S h_a - mg}$

3.3) Andamento della pressione



▨ = incremento di pressione dovuto al gas (trascurabile!)

3.4) Forza di pressione:

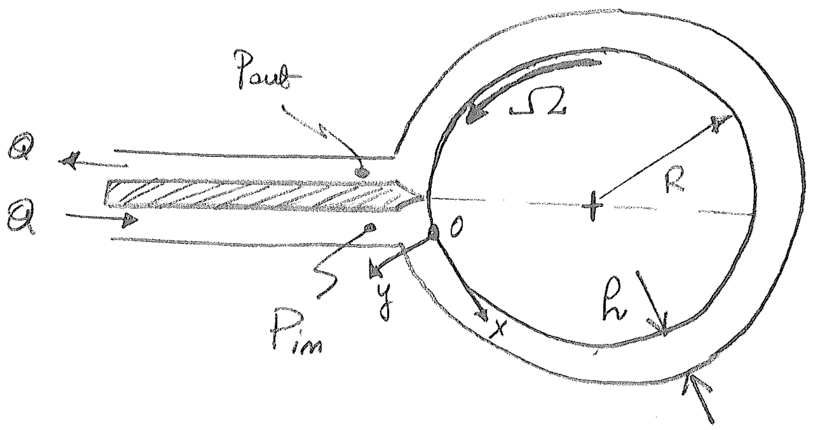
$$\frac{F_p}{W} = \rho_a g h_a \cdot \frac{h_a}{2} + \rho_a g h_a (b - h_a) + \rho_w g (b - h_a)\frac{(b - h_a)}{2} + [P_{atm} + \rho_w g (h + h_a)] \cdot b$$

$$= \xrightarrow{\text{trasc.}}\cancel{\rho_a g h_a \left(b - \frac{h_a}{2}\right)} + \rho_w g \frac{(b - h_a)^2}{2} + P_{atm} \cdot b + \rho_w g (h + h_a) b$$

$$= \rho_w g \cdot \frac{b^2 + h_a^2}{2} - \cancel{\rho_w g b \cdot h_a} + P_{atm} \cdot b + \rho_w g h \cdot b + \cancel{\rho_w g h_a b}$$

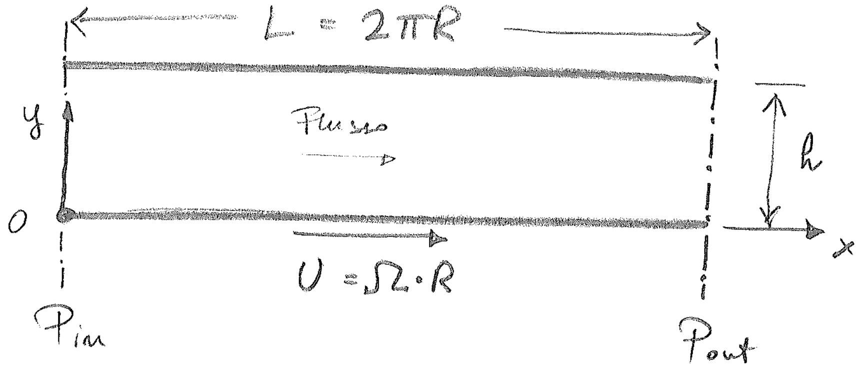
$$= \rho_w g \left(\frac{b^2 + 2 b \cdot h + h_a^2}{2} \right) + P_{atm} \cdot b$$

EXE 3



Hp: $h \ll R$

Possiamo usare coordinate cartesiane. Il problema è equivalente al seguente caso:



Hp: $\frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0$

$\frac{\partial \cdot}{\partial z} = 0$ $\Rightarrow$

$v_x(y) \neq 0$

$v_y, v_z = 0$

Eq: $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ [CONT.]

$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ [NS_x]

$0 = -\frac{\partial P}{\partial y}$ [NS_y]

Poiché $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\Delta p}{L} = \frac{P_{out} - P_{in}}{L}$ e $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{d^2 v_x}{dy^2}$ si ha:

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\Delta p}{L}\right) y^2 + C_1 y + C_2$$

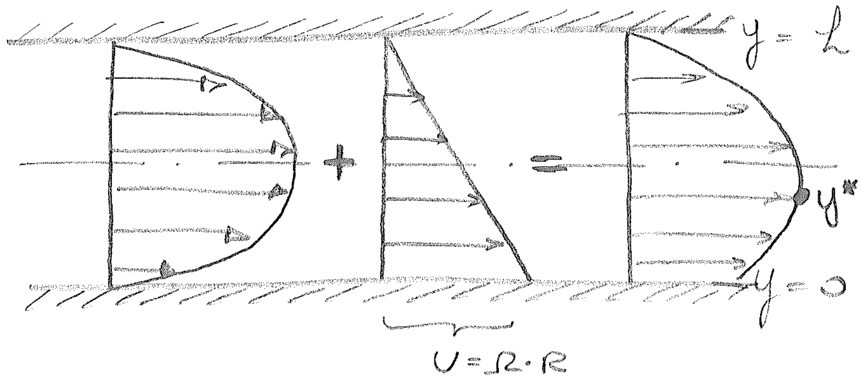
C.C. #1 : $v_x(y=0) = \Omega \cdot R = U \Rightarrow C_2 = U$

C.C. #2 : $v_x(y=h)=0 \Rightarrow 0=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\Delta p}{L}\right)h^2+C_1\cdot h+U$

$$C_1=-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\Delta p}{L}\right)h-\frac{U}{h}$$

$$\boxed{v_x(y)=\underbrace{\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\Delta p}{L}\right)(y^2-hy)}_{\text{Poiseuille}}+\underbrace{U\left(1-\frac{y}{h}\right)}_{\text{Couette}}}$$

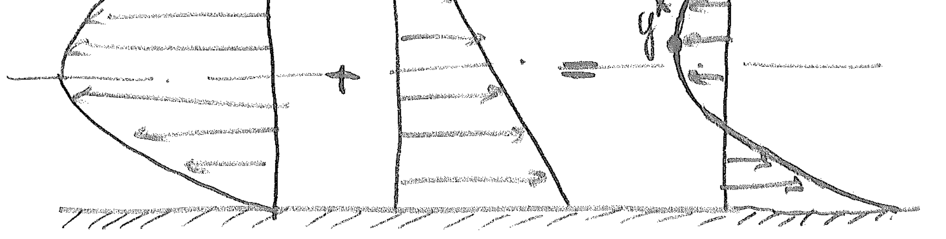
$\Delta p<0$



[20%]

v_x^{max} se $\frac{dv_x(y^*)}{dy}=0$ ovvero se $\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\Delta p}{L}\right)(2y^*-h)-\frac{U}{h}=0$

$$y^*=\left[\frac{2\mu}{\left(\frac{\Delta p}{L}\right)}\cdot\frac{U}{h}+h\right]\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y^*=\frac{h}{2}-\frac{\mu U}{\left(\frac{\Delta p}{L}\right)\cdot h}}$$



3.2) Forza d'attrito e potenza

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta p}{L}\right)(2y - h) - \mu \frac{U}{h}$$

$$\tau_w = \tau_{xy}(y=0) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta p}{L}\right) h - \mu \frac{U}{h}$$

$$\boxed{F_z = \tau_w \cdot LW = -\left[\left(\frac{\Delta p}{L}\right)\frac{h}{2} + \mu \frac{U}{h}\right] LW}$$

$$\boxed{Pot = F_z \cdot U = -\left[\left(\frac{\Delta p}{L}\right)\frac{h}{2} + \mu \frac{U}{h}\right] LW\Omega R}$$

[15%]