

1

Per lo stoccaggio di liquidi industriali si possono utilizzare cisterne in acciaio come quelle rappresentate in Figura 1. Le cisterne sono separate da una parete intermedia e sono riempite con fluidi di densità diversa ( $\rho_1$  e  $\rho_2$  rispettivamente) e battente diverso ( $h_1$  ed  $h_2$  rispettivamente). Tra le due cisterne è presente una paratia incernierata in A ed avente altezza  $h$ . Sapendo che  $\rho_2 = 2\rho_1$  e che  $h_1 = 1.5h_2 = 2h$ , si chiede di:

1. derivare un'espressione per la forza agente in direzione orizzontale sulla paratia, indicando il verso di azione della forza (verso destra o verso sinistra?); [10%]
2. determinare un'espressione per il momento netto esercitato sulla paratia, indicando il verso di rotazione di quest'ultima (orario o antiorario?). [15%]

2

Il nastro trasportatore in Figura 2 viene utilizzato per sollevare una portata specifica  $\Gamma$  (espressa in  $[kg/ms]$ ) di un olio viscoso. entra nello stampo, si chiede di:

1. semplificare le equazioni di conservazione, indicando chiaramente le ipotesi semplificative adottate; [5%]
2. ricavare l'espressione del gradiente di pressione che agisce in direzione  $x$  (ovvero parallelamente al nastro); [5%]
3. ricavare l'espressione dello spessore  $\delta$  del film in funzione della portata  $\Gamma$ ; [10%]
4. ricavare l'espressione dello spessore per cui risulta massima la portata specifica trasferita verso l'alto; [10%]
5. ricavare l'espressione della vorticità del fluido nel film. [5%]

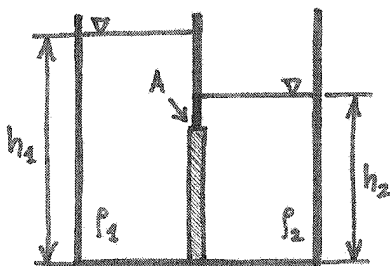


Figura 1: Cisterne per stoccaggio industriale.

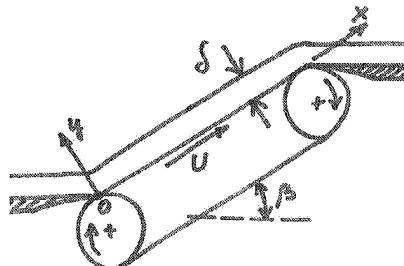


Figura 2: Nastro trasportatore.

3

Uno dei sistemi antincendio ad acqua più comuni è il sistema a sprinkler, composto da una rete di tubazioni piene d'acqua in pressione e sulle quali sono installati degli ugelli erogatori. Gli ugelli erogatori montano un bulbo termosensibile: quando, a causa di un incendio, la temperatura nell'ambiente protetto supera il valore della temperatura nominale del bulbo, quest'ultimo si rompe, lasciando fuoriuscire un getto di gocce d'acqua nel punto interessato dall'incendio. Sia  $v_0$  la velocità iniziale delle gocce (sferiche) generate dagli ugelli erogatori e sia  $D_p$  il loro diametro. Si supponga inoltre che il moto delle gocce avvenga nella sola direzione orizzontale (ovvero che sia trascurabile l'effetto della gravità) ed in regime di Stokes ( $C_D = 24/Re_p$ ).

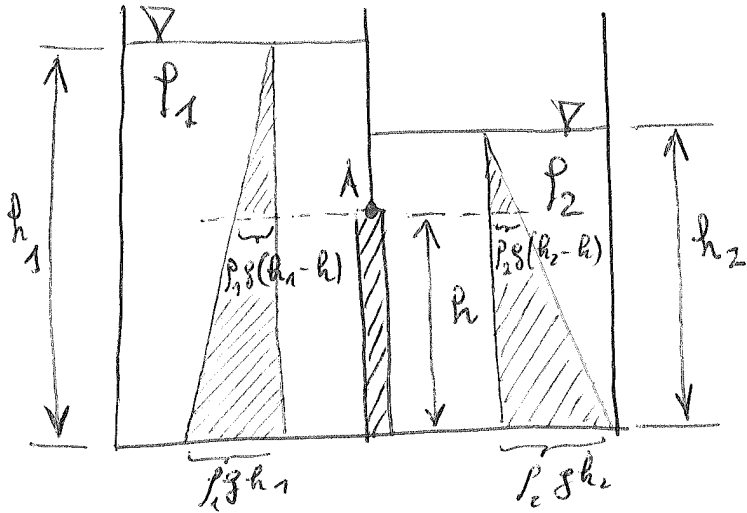
1. Determinare l'espressione della distanza di arresto nell'ipotesi di massa delle gocce costante durante il moto e fluido fermo. [15%]
2. In caso di incendio, l'ipotesi di massa costante risulta poco realistica in quanto una frazione significativa delle gocce d'acqua viene trasportata dal flusso d'aria calda prodotta dal fuoco ed evapora, andando così a raffreddare tale flusso a scapito di una perdita di massa. Determinare una espressione per la distanza di arresto in direzione orizzontale nelle ipotesi che il tasso di evaporazione sia  $c = k\pi D_p^2 [kg/s]$  con  $k$  costante, e che l'aria calda si muova solo in direzione verticale. [25%]

$$\text{Eq. della statica: } dp = -\rho g dz$$

$$\text{Continuità: } \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \text{Navier-Stokes: } \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \quad \text{Vorticità: } \omega_k = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$\text{Forza di Drag: } F_D = \frac{1}{2} C_D \rho A_p (\mathbf{v} - \mathbf{v}_p) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_p| \quad \text{Num. Reynolds particella: } Re_p = \frac{\rho |\mathbf{v} - \mathbf{v}_p| D_p}{\mu}$$

EXE 1



$$\rho_2 = 2\rho_1$$

$$h_1 = 1.5 h_2 = 2h$$

1.1) Calcolo forze orizzontali

$$F_{or,1} = \frac{[\rho_1 g (h_1 - h) + \rho_1 g h_1] h w}{2} \quad \text{diretta verso destra}$$

$$F_{or,2} = \frac{[\rho_2 g (h_2 - h) + \rho_2 g h_2] h w}{2} \quad \text{diretta verso sinistra}$$

$$\Delta F_{or} = F_{or,1} - F_{or,2}$$

$$= \frac{[(2\rho_1 g h_1 - \rho_1 g h) - (2\rho_2 g h_2 - \rho_2 g h)] h w}{2}$$

$$= \frac{[2\rho_1 g \cdot 2h - \rho_1 g h - 2 \cdot 2\rho_1 g \frac{4}{3}h + 2\rho_1 g h] h w}{2}$$

$$= \frac{(4\rho_1 g h - \rho_1 g h - \frac{16}{3}\rho_1 g h + 2\rho_1 g h) h w}{2}$$

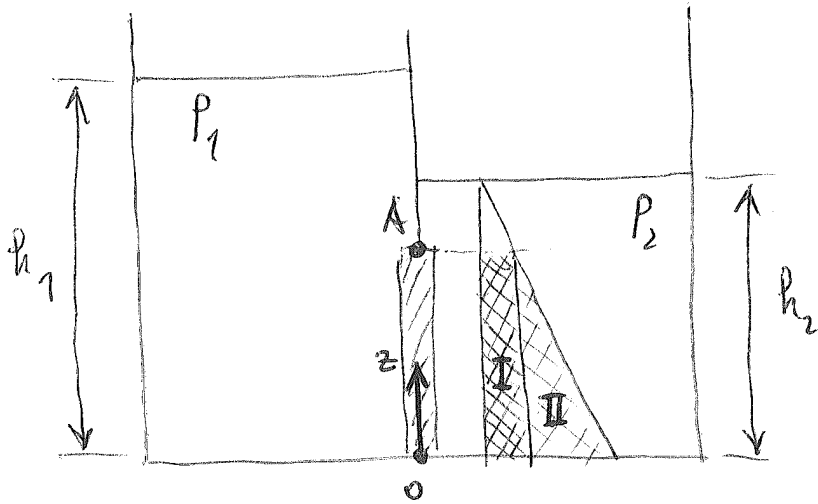
$$= \left(5 - \frac{16}{3}\right) \frac{\rho_1 g h^2 w}{2} = \boxed{-\frac{1}{6} \rho_1 g h^2 w}$$

Poiché  $\Delta F_{or}$  è negativo ( $F_{or,2} > F_{or,1}$ ) risulta diretta  $\rightarrow$

verso sinistra.

2

## 1.2) Calcolo del momento



Ponendo il sistema di riferimento con origine sul fondo, il braccio risulta  $b = h - z$ .

$$M_1 = \int_0^h \int_0^w \underbrace{p_1 g (h_1 - z)}_{p(z)} \cdot \underbrace{dy dz}_{dA} \cdot \underbrace{(h - z)}_{\text{braccio}}$$

$dF = p(z) dA$

Momento  
autorodario  
generato  
dal fluido I

$$= p_1 g w \int_0^h (h_1 - z)(h - z) dz$$

$$= p_1 g w \int_0^h (2h - z)(h - z) dz$$

$$2h^2 - z \cdot h - 2hz + z^2 =$$
$$= 2h^2 - 3h \cdot z + z^2$$

$$= p_1 g w \left( 2h^2 \cdot h - 3h \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} \right) = p_1 g w \cdot \frac{5}{6} h^3$$

Allo stesso risultato si arriva sfruttando la 3  
 via "geometrica" ovvero scomponendo  $M_1$  in  
 due contributi:

$$M_1^I = \underbrace{\rho_1 g (h_1 - h) \cdot h W}_{F^I} \cdot \underbrace{\frac{h}{2}}_{b^I} = \rho_1 g W (h_1 - h) \frac{h^2}{2}$$

$\rho_1 g W \frac{h^3}{2}$  associato alla distribuzione di  
 pressione I, che genera una  
 forza risultante applicata ad  $\frac{h}{2}$

$$M_1^{II} = \rho_1 g h \cdot \frac{h W}{2} \cdot \frac{2h}{3} = \rho_1 g W \frac{h^3}{3}$$

associato alla  
 distribuzione di pressione II, che  
 genera una forza risultante  
 applicata ad  $\frac{2h}{3}$ .

$$M_1 = M_1^I + M_1^{II} = \rho_1 g W \left( \frac{h^3}{2} + \frac{h^3}{3} \right) = \frac{5}{6} \rho_1 g W h^3 \checkmark$$

$$\boxed{M_2} = \int_0^h \int_0^w \rho_2 g (h_2 - z) dy dz \cdot (h - z)$$

$$= \rho_2 g W \int_0^h (h_2 - z)(h - z) dz$$

$$= \rho_2 g W \int_0^h \left( \frac{4}{3} h - z \right) (h - z) dz = \dots = \frac{1}{2} \rho_2 g W h^3$$

Seguendo la via "geometrica":

4

$$M_2^I = \rho_2 g (h_2 - h) \cdot hW \cdot \frac{h}{2} = \\ = \frac{1}{6} \rho_2 g W h^3$$

$$M_2^{II} = \rho_2 g h \cdot \frac{hW}{2} \cdot \frac{2}{3} h = \rho_2 g W \frac{h^3}{3}$$

$$M_2 = M_2^I + M_2^{II} = \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) \rho_2 g W h^3 = \frac{1}{2} \rho_2 g W h^3$$

Ord:  $M_1 = \frac{5}{6} \rho_1 g W h^3$

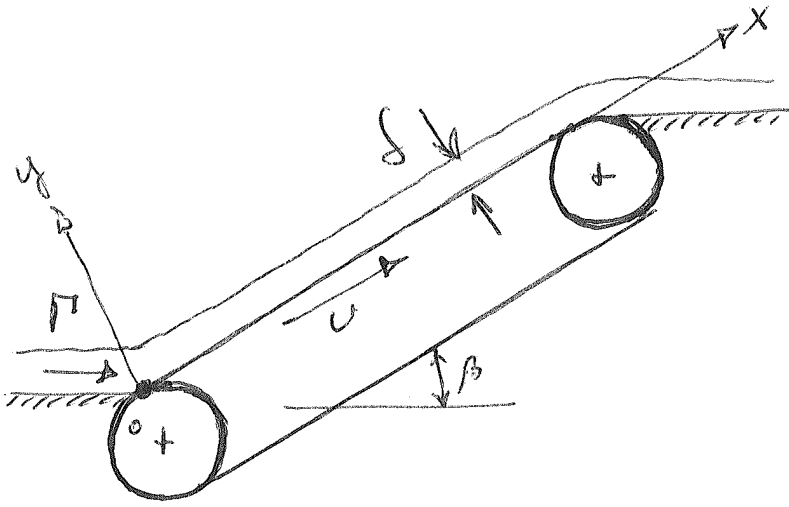
$$M_2 = \frac{1}{2} \rho_2 g W h^3 \stackrel{\uparrow}{=} \rho_1 g W h^3 > M_1$$

$$\rho_2 = 2\rho_1$$

Quindi il momento risultante è:  $M = \frac{1}{6} \rho_1 g W h^3$

e fa ruotare la paratia in senso orario.

# EXE 2



2.1)  $v_x(y) \neq 0$   
 $v_y = v_z = 0$   
 $\frac{\partial \cdot}{\partial z} = 0$   
 $\frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0$

CONT.:  $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$

NS<sub>x</sub>:  $0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$

NS<sub>y</sub>:  $0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$

con  $\frac{\partial p}{\partial x} = +\rho g \sin \beta$   
 occhio!

2.2) Calcolo dello spessore  $d$ :

$\Pi \triangleq \frac{\dot{m}}{W} = \frac{\rho Q}{W} = \frac{\rho \langle v \rangle \cdot W d}{W} = \rho \langle v \rangle d$

con  $\langle v \rangle \triangleq \frac{1}{d} \int_0^d v_x(y) dy$

Bisogna quindi calcolare  $v_x(y)$ :

$v_x(y) = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + c_1 y + c_2$

c.c. #1 :  $\tau_{xy}(y = \delta) = 0$

$\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y = \delta} = 0$

$(\frac{\partial p}{\partial x}) \cdot \delta + \mu c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -(\frac{\partial p}{\partial x}) \frac{\delta}{\mu}$

c.c. #2 :  $v_x(y = 0) = U \Rightarrow c_2 = U$

$v_x(y) = \frac{1}{2\mu} (\frac{\partial p}{\partial x}) (y^2 - 2\delta y) + U$

$\langle v_x \rangle = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta v_x(y) = \left[ \frac{1}{2\mu} (\frac{\partial p}{\partial x}) \left( \frac{\delta^3}{3} - 2\delta \frac{\delta^2}{2} \right) + U \cdot \delta \right] \cdot \frac{1}{\delta}$

$\left| \frac{\delta^3}{3} - \delta^3 = -\frac{2}{3} \delta^3 \right.$   
 $= \left[ \frac{1}{3\mu} (-\rho g \sin \beta) \delta^3 + U \cdot \delta \right] \cdot \frac{1}{\delta}$

$= \frac{\rho g \sin \beta}{3\mu} \delta^2 + U$

$\left[ \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s^2} \cdot \frac{m^2}{kg} \cdot \frac{m \cdot s}{s} \right] = \left[ \frac{m}{s} \right]$  ok!

Abbiamo :  $\Pi = -\frac{\rho^2 g \sin \beta}{3\mu} \delta^3 + \rho U \delta \quad (1)$

$$\frac{\rho^2 g \sin \beta}{3\mu} \delta^3 + \rho U \delta + \Pi = 0$$

Da questa equazione si può calcolare  $\delta(\Pi)$ .

2.3)  $\delta$  che massimizza  $\Pi$

Riprendendo la (1), lo spessore cercato deriva

dalla condizione  $\frac{d\Pi}{d\delta} = 0$  :

$$\frac{d\Pi}{d\delta} = - \frac{\rho^2 g \sin \beta}{\mu} \delta^2 + \rho U = 0 \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{\mu U}{\rho g \sin \beta}}$$

2.4) calcolo vorticità :

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) y + \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) \delta$$

$$= \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) \cdot \frac{\delta - y}{\mu}$$

$$\omega_z(y=0) = \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) \cdot \frac{\delta}{\mu} > 0 \Rightarrow \text{rotazione oraria}$$

$$\omega_z(y=\delta) = 0$$



### 3.2) Distanza di arresto con massa variabile | 2

$$v_{p,x} \frac{dm_p}{dt} + m_p \frac{dv_{p,x}}{dt} = - 3\pi \mu d_p v_{p,x}$$

$$m_p \triangleq \frac{\pi d_p^3 \rho}{6} \Rightarrow \frac{dm_p}{dt} = \frac{\pi d_p^2 \rho}{2} \frac{dd_p}{dt} \quad (1)$$

$$\frac{dm_p}{dt} \triangleq \overset{=0}{\cancel{m_{in}}} - m_{out} = -c = -k\pi d_p^2 \quad (2)$$

Eguagliando (1) e (2):

$$\frac{\pi d_p^2 \rho}{2} \frac{dd_p}{dt} = -k\pi d_p^2$$

$$\boxed{\frac{dd_p}{dt} = -\frac{2k}{\rho}}$$

$$dt = -\frac{\rho}{2k} dd_p$$

$$d_p(t) = d_0 - \frac{2k}{\rho} t$$

Abbiamo:

$$\frac{dv_{p,x}}{dt} = \frac{1}{m_p} \left( -3\pi \mu d_p - \frac{dm_p}{dt} \right) v_{p,x}$$

$$= \left( -\frac{18\mu}{\rho d_p^2} + \frac{k\pi d_p^2}{\frac{\pi d_p^3 \rho}{6}} \right) v_{p,x}$$

$$\frac{dV_{p,x}}{dt} = \left( \underbrace{-\frac{18\mu}{\rho_p}}_{C_1} \cdot \frac{1}{dp^2} + \underbrace{\frac{6K}{\rho_p}}_{C_2} \cdot \frac{1}{dp} \right) V_{p,x}$$

$$\int_{V_0}^{V_{p,x}} \frac{dV_{p,x}}{V_{p,x}} = (-C_1 dp^{-2} + C_2 dp^{-1}) dt$$

$$= \left( C_1 \frac{\rho_p}{2k} dp^{-2} - C_2 \frac{\rho_p}{2k} dp^{-1} \right) ddp$$

$$\frac{18\mu}{\rho_p} \cdot \frac{\rho_p}{2k} = \frac{9\mu}{k} \qquad \frac{6K}{\rho_p} \cdot \frac{\rho_p}{2k} = 3$$

$$= \frac{9\mu}{k} \int_{d_0}^{dp} dp^{-2} ddp - 3 \int_{d_0}^{dp} dp^{-1} ddp$$

$$\ln\left(\frac{V_{p,x}}{V_0}\right) = \frac{9\mu}{k} \left(-dp\right) \Big|_{d_0}^{dp} - 3 \ln dp \Big|_{d_0}^{dp}$$

$$= \frac{9\mu}{k} \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{dp}\right) - 3 \ln\left(\frac{dp}{d_0}\right)$$

$$V_{p,x} = V_0 \left(\frac{d_0}{dp}\right)^3 \cdot \exp\left[\frac{9\mu}{k} \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{dp}\right)\right]$$

$$X_p(t) = \int_0^t v_{p,x} dt$$

$$= v_0 \int_0^t \left( \frac{d_0}{d_p} \right)^3 \cdot \exp[\dots] dt$$

$$A = \frac{3\mu}{k}$$

$$= v_0 d_0^3 \int_{d_0}^{d_p} \frac{1}{d_p^3} \frac{\exp(A/d_0)}{\exp(A/d_p)} \cdot \left( -\frac{d_p}{2k} \right) dd_p$$

Poniamo  $d_p = x$  nell'integrale  $\rightarrow$

$$= - \frac{f_p v_0 d_0^3 \exp(A/d_0)}{2k} \int_{d_0}^{d_p} \frac{1}{x^3} e^{-A/x} dx$$

Ricordando che  $\frac{d}{dx} (e^{-A/x}) = \frac{A e^{-A/x}}{x^2}$  riscriviamo

l'integrale come:

$$\int_{d_0}^{d_p} \frac{A}{A} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{e^{-A/x}}{x^2} dx = \frac{1}{A} \int_{d_0}^{d_p} \frac{1}{x} \cdot \frac{A e^{-A/x}}{x^2} dx$$

e lo risolveremo per parti ( $\int u dv = u \cdot v - \int v du$ )

ponendo:

$$dv = \frac{A e^{-A/x}}{x^2} dx \Rightarrow v = e^{-A/x}$$

$$u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2} dx$$

$$\frac{1}{A} \int_{d_0}^{d_p} \frac{1}{x} \cdot \frac{A e^{-A/x}}{x^2} dx = \frac{1}{A} \left[ \frac{1}{x} \cdot e^{-A/x} \Big|_{d_0}^{d_p} - \int_{d_0}^{d_p} e^{-A/x} \left( -\frac{1}{x^2} \right) dx \right] \quad [5]$$

$$= \frac{1}{A} \left[ \frac{1}{d_p} e^{-A/d_p} - \frac{1}{d_0} e^{-A/d_0} + \frac{1}{A} e^{-A/x} \Big|_{d_0}^{d_p} \right]$$

$$\frac{1}{A} (e^{-A/d_p} - e^{-A/d_0})$$

Tornando all'espressione per  $X_p(t)$  abbiamo:

$$X_p(t) = - \frac{\rho_p v_0 d_0^3 e^{-1/d_0}}{2k} \left[ \frac{1}{d_p} e^{-\frac{9\mu}{k} \cdot \frac{1}{d_p}} - \frac{1}{d_0} e^{-\frac{9\mu}{k} \cdot \frac{1}{d_0}} + \frac{k}{9\mu} \left( e^{-\frac{9\mu}{k} \cdot \frac{1}{d_p}} - e^{-\frac{9\mu}{k} \cdot \frac{1}{d_0}} \right) \right] \cdot \left( \frac{9\mu}{k} \right)^{-1}$$

$$= \frac{\rho_p v_0 d_0^3 e^{-1/d_0}}{18\mu} [ \dots ]$$

$$= \frac{\rho_p d_0^3}{18\mu} v_0 e^{-1/d_0} [ \dots ]$$

$\tau_p @ t=0^+$

$$X_p(t) = v_0 z_p \cdot e^{-\frac{1}{d_0}} \left[ \left( \frac{1}{d_p} e^{-\frac{g\mu}{k} \cdot \frac{1}{d_p}} - \frac{1}{d_0} e^{-\frac{g\mu}{k} \cdot \frac{1}{d_0}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{k}{g\mu} \left( e^{-\frac{g\mu}{k} \cdot \frac{1}{d_p}} - e^{-\frac{g\mu}{k} \cdot \frac{1}{d_0}} \right) \right]$$

$$X_p(t) = v_0 z_p \cdot e^{-\frac{1}{d_0}} \left[ e^{-\frac{g\mu}{k} \cdot \frac{1}{d_p}} \left( \frac{1}{d_p} + \frac{k}{g\mu} \right) - e^{-\frac{g\mu}{k} \cdot \frac{1}{d_0}} \left( \frac{1}{d_0} + \frac{k}{g\mu} \right) \right]$$

DISTANZA DI ARRESTO CON MASSA VARIABILE

NOTA: se  $d_p = \frac{1}{4} d_0$  allora:

$$v_{p,x} = v_0 \cdot 64 \cdot \exp \left[ \frac{g\mu}{k} \left( \frac{1}{d_0} - \frac{4}{d_0} \right) \right] \\ = 64 v_0 \cdot \exp \left( -\frac{27\mu}{k d_0} \right)$$

con  $\mu \sim \mathcal{O}(10^{-5})$ ,  $k \sim \mathcal{O}(10^{-3})$ ,  $d_0 \sim \mathcal{O}(10^{-3})$

ovvero  $\frac{\mu}{k \cdot d_0} \sim \mathcal{O}(10)$ . Se  $v_0 \sim \mathcal{O}(1)$  allora

si vede che  $v_{p,x} \approx 0$  se  $d_p = \frac{1}{4} d_0$

ovvero la poccia si ferma dopo un tempo decisamente inferiore a quello impiegato nel caso di massa costante.