FLUIDODINAMICA - AA 2012/2013

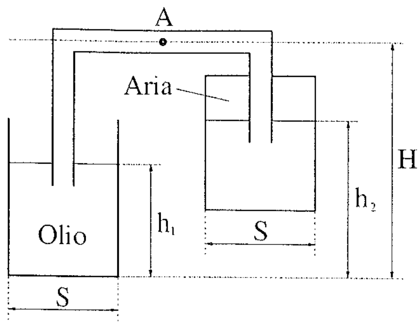
Prima Prova - Durata 2 ore - Libri Chiusi

10 Dicembre 2012

1

Si consideri il sistema rappresentato in Fig. 1 in cui un recipiente aperto all'atmosfera, contenente olio con densità ρ_o, è collegato tramite una tubazione a un secondo recipiente chiuso, contenente olio e aria non miscelati.

1. Date le altezze h_1 ed h_2 del pelo libero nei due recipienti e l'altezza H della tubazione, si richiede di determinare l'espressione della pressione idrostatica nel punto A e della pressione dell'aria nel recipiente chiuso. [10%]



2. Sapendo che i due recipienti hanno uguale sezione S, si chiede di determinare la nuova espressione per la pressione dell'aria nel recipiente chiuso nel caso in cui l'altezza del pelo libero h_1 aumenti del 20%.
   [Suggerimento: che trasformazione subisce l'aria contenuta nel recipiente chiuso?] [15%]

2

Si deve dimensionare l'iniettore di un bruciatore industriale in modo da garantire una distribuzione di combustibile più omogenea possibile all'interno del bruciatore stesso. Il bruciatore è costituito da un contenitore cilindrico di raggio R, al centro del quale è montato l'iniettore. Quest'ultimo è dotato di fori laterali, aventi diametro d, attraverso i quali il combustibile (avente densità ρ_p) viene iniettato nel bruciatore sotto forma di goccioline aventi diametro $D_p = d/2$ e velocità iniziale v_0. Ipotizzando che le gocce si muovano solo orizzontalmente in regime di Stokes e che il fluido comburente (avente densità ρ e viscosità μ) sia in quiete nel bruciatore, si chiede di:

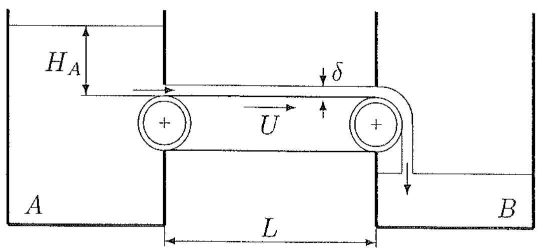
1. determinare le dimensioni dei fori dell'iniettore che permettono di generare goccioline sufficientemente grandi da raggiungere la parete laterale del bruciatore, ovvero capaci di coprire una distanze orizzontale pari a R durante il loro moto. Si ipotizzi massa delle goccioline costante. [15%]

2. Dal momento in cui le goccioline si staccano dall'iniettore, il combustibile brucia con tasso di combustione $c = k\pi D_p^2$ (con k costante espressa in kg/m^2s). Indicato con D_i il diametro iniziale delle goccioline, determinare la velocità di queste ultime quando il loro diametro si è ridotto a $0.5D_i$. [20%]

3

Una pompa ad attrito convoglia un fluido viscoso (avente viscosità μ $[Pa \cdot s]$ e densità ρ $[kg/m^3]$) tra due serbatoi A e B tramite un nastro trasportatore (avente lunghezza L e larghezza W) come mostrato in Fig. 2.

1. Assumendo che il nastro sia orizzontale, che la sua velocità sia costante e pari a U $[m/s]$, e che si possa assumere nullo lo sforzo di taglio all'interfaccia superiore del liquido, determinare e rappresentare graficamente il profilo di velocità del fluido nell'ipotesi che il livello di liquido nei due serbatoi resti costante. [15%]



2. Ricavare l'equazione per il calcolo dello spessore del film nota la portata volumetrica, Q. [5%]

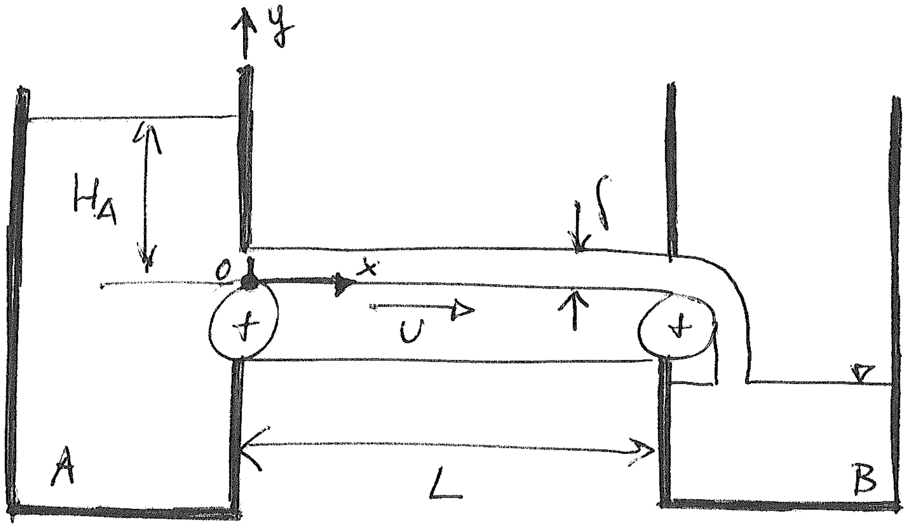
3. Per effetto del trasporto di fluido, il serbatoio B inizia a riempirsi. Calcolare l'altezza H_B che deve raggiungere il fluido nel serbatoio B affinchè risulti nulla la portata volumetrica trasferita. [20%]

Continuità $\quad \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$ $\qquad$ *Navier-Stokes* $\quad \rho\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right)$

Num. Reynolds e Forza di Drag per la particella: $\quad Re = \dfrac{\rho D_p|\mathbf{u}-\mathbf{v}|}{\mu}, \quad \mathbf{F}_D = \dfrac{1}{2}C_D\rho A_p(\mathbf{u}-\mathbf{v})|\mathbf{u}-\mathbf{v}|$

Legge di Stevino: $\quad \mathrm{d}p = -\rho g \mathrm{d}z$

EXE 3



Hp : $\frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0$

$\frac{\partial \cdot}{\partial z} = 0$

$v_x(y) \neq 0$

$v_z = v_y = 0$

3.1) CONT. $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$

NS_x $\quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$

NS_y $\quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial y}$

Con $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\Delta P}{L} = -\rho g \frac{H_A}{L}$ COSTANTE!

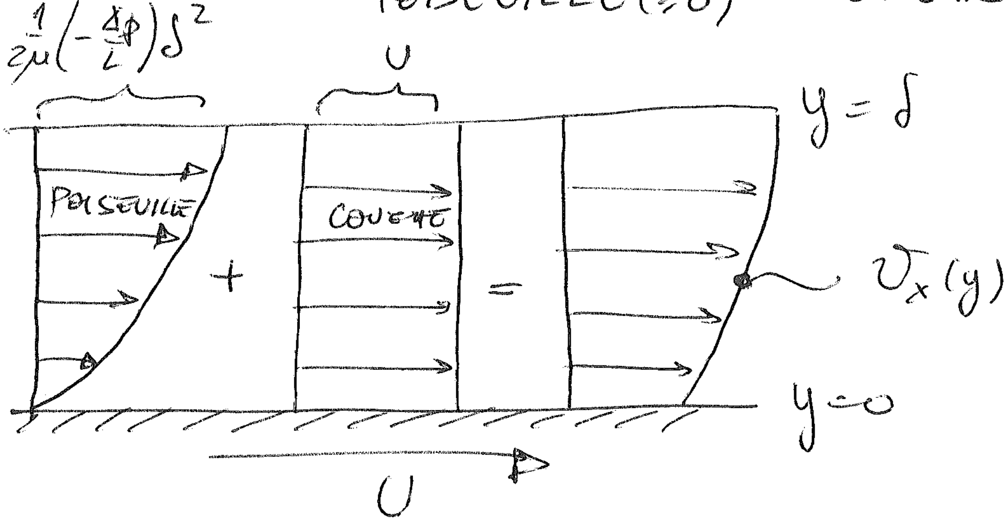
$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\Delta P}{L}\right) y^2 + C_1 y + C_2$$

C.C. #1 : $v_x(y=0) = U \Rightarrow C_2 = U$

C.C. #2 : $\tau_{xy}(y=\delta) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=\delta} = 0$

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)\delta + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)\delta$$

$$\boxed{v_x(y)=\underbrace{\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\Delta p}{L}\right)\left(y^2-2\delta y\right)}_{\text{POISEUILLE}(\geq 0)}+\underbrace{U}_{\text{COUETTE}(\geq 0)}}$$



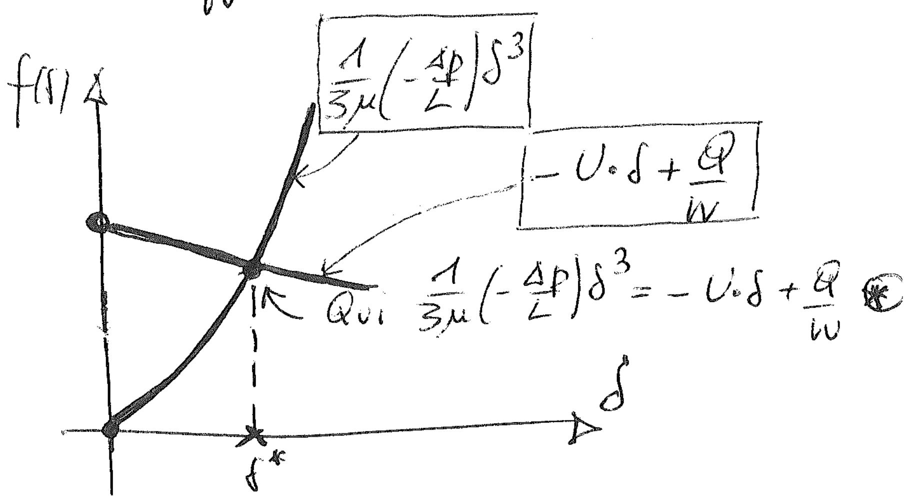
3, 2) $$\frac{Q}{W}=\int_0^\delta v_x(y)\,dy=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\Delta p}{L}\right)\underbrace{\left(\frac{y^3}{3}-2\delta\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^\delta}_{\frac{\delta^3}{3}-\frac{2\delta^3}{2}=-\frac{2}{3}\delta^3}+U\cdot\delta$$

$$=\frac{1}{3\mu}\left(-\frac{\Delta p}{L}\right)\delta^3+U\cdot\delta$$

Lo spessore è ricavabile dalla seguente equazione:

$$\frac{1}{3\mu}\left(-\frac{\Delta p}{L}\right)\delta^3+U\cdot\delta-\frac{Q}{W}=0 \quad ⊛$$

In forma grafica:



3.3) La portata volumetrica trasferita si annulla quando il gradiente di pressione

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\rho g (H_B - H_A)}{L}$$

è sufficientemente elevato da annullare l'effetto prodotto dal moto del nastro. Vale sempre:

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\Delta p}{L}\right)(y^2 - 2\delta y) + U$$

ma adesso $\frac{\Delta p}{L} = \rho g \frac{(H_B - H_A)}{L} > 0$!

Pertanto:

$$\frac{Q}{W} = \frac{1}{3\mu}\left(-\frac{\Delta p}{L}\right)\delta^3 + U \cdot \delta = 0 \Rightarrow \frac{\Delta p}{L} = \frac{3\mu U \delta}{\delta^3}$$

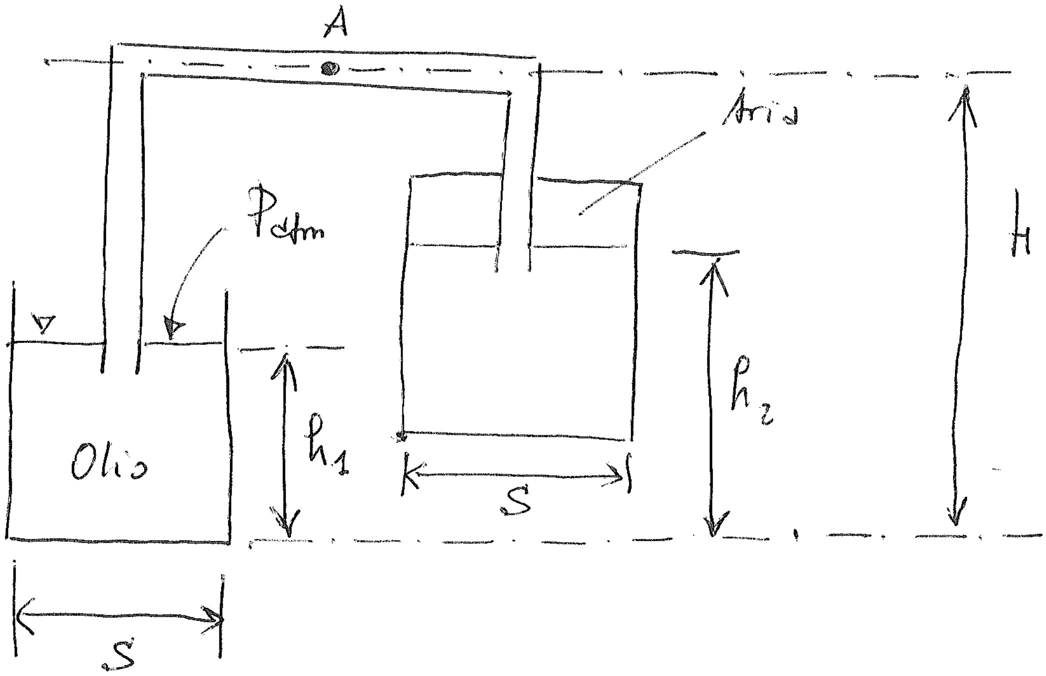
$$H_B - H_A = \frac{3\mu U}{\delta^2} \cdot \frac{L}{\rho g} \Rightarrow \boxed{H_B = H_A + \frac{3\mu U L}{\rho g \delta^2}}$$

[20%]

$$\left[\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m\,s}} \cdot \frac{\cancel{m}}{\cancel{s}} \cdot m \cdot \frac{m^3}{\cancel{kg}} \cdot \frac{s^2}{\cancel{m}} \cdot \frac{1}{m^2}\right] = [m]$$

ok!

EXE 1



1.1) $P_A = P_{atm} + \rho_o g h_1 - \rho_o g H = P_{atm} - \rho_o g (H - h_1)$

$\Rightarrow P_A < P_{atm}$!

$$P_{aria} = P_A + \rho_o g h_2 + \rho_o g H = P_{atm} - \rho_o g (H - h_1) + \rho_o g (H - h_2)$$

$= P_{atm} + \rho_o g (h_1 - h_2)$ con $h_2 > h_1$

$\Rightarrow P_{aria} < P_{atm}$ [10%]

1.2) h_1 puo' aumentare in 2 casi:

(A) Massa di olio costante nel sistema: in questo caso se $h_1' = 1.2\, h_1$ allora $h_2' = 0.8\, h_2$ e l'aria nel serbatoio chiuso subisce un'espansione, che assumeremo isoterma ($p \cdot V = cost$)

Il volume d'olio nel serbatoio chiuso passa da $V_{olio} = S \cdot h_2$ a $V'_{olio} = S \cdot h'_2 = 0.8\, V_{olio}$ ovvero si riduce del 20% : conseguentemente aumenta del 20% il volume d'aria.

$$P_{aria} \cdot V_{aria} = P'_{aria} \cdot V'_{aria} \Rightarrow \underbrace{P'_{aria}}_{= 1.2\, P_{aria}} = P_{aria} \cdot \frac{V_{aria}}{V'_{aria}}$$

(B) C'è un rabbocco di olio nel serbatoio di sinistra: in questo caso possiamo pensare che aumenti anche il livello h_2 nel serbatoio di destra e che quindi l'aria subisca una compressione, sempre isoterma ($p \cdot V = cost$)

$$P_A = P_{atm} - \rho_0 g (H - 1.2 h_1)$$

$$P'_{aria} = P_{atm} + \rho_0 g (1.2 h_1 - h'_2) \quad \text{con } h'_2 = ?$$

$$P_{aria} \cdot V_{aria} = P'_{aria} \cdot V'_{aria} \Rightarrow P_{aria} \cdot (h_B - h_2) = P'_{aria} (h_B - h'_2)$$

con h_B = altezza del serbatoio chiuso

Avremo: $P'_{aria} = P_{aria} \cdot \dfrac{h_B - h_2}{h_B - h'_2}$

ovvero:

$$P_{atm} + \rho_0 g (1.2 h_1 - h'_2) = \left[P_{atm} + \rho_0 g (h_1 - h_2)\right] \cdot \frac{h_B - h_2}{h_B - h'_2}$$

$$\left[P_{atm} + \rho_0 g\,(1.2\,h_1 - X)\right] \cdot (h_B - X) = \left[P_{atm} + \rho_0 g (h_1 - h_2)\right](h_B - h_2)$$

ove con X si è indicata l'incognita h_2'. Avremo:

$$0.2\,\rho_0 g\, h_1 \cdot h_B - \underset{\sim\sim}{X \rho_0 g\, h_B} - \underset{\sim\sim}{1.2\,\rho_0 g\, h_1 \cdot X} + X^2_{\rho_0 g} - \underset{\sim\sim}{X \cdot P_{atm}} =$$

$$= -\rho_0 g\, h_2 h_B - P_{atm} \cdot h_2 - \rho_0 g\, h_1 h_2 + \rho_0 g\, h_2^2$$

$$\rho_0 g \cdot X^2 - X\,(\rho_0 g\, h_B + 1.2\,\rho_0 g\, h_1 + P_{atm}) + 0.2\,\rho_0 g\, h_1 \cdot h_B +$$

$$+ \rho_0 g\, h_2 h_B + \rho_0 g\, h_1 h_2 + \rho_0 g\, h_2^2 + P_{atm} \cdot h_2 = 0$$

$$X^2 - X\left(h_B + 1.2\,h_1 + \frac{P_{atm}}{\rho_0 g}\right) + \left(0.2\,h_1 h_B + h_2 h_B + h_1 h_2 + h_2^2\right.$$

$$\left. + \frac{P_{atm}}{\rho_0 g} h_2\right) = 0 \quad \Rightarrow A \cdot X^2 + B X + C = 0$$

con $A = 1$

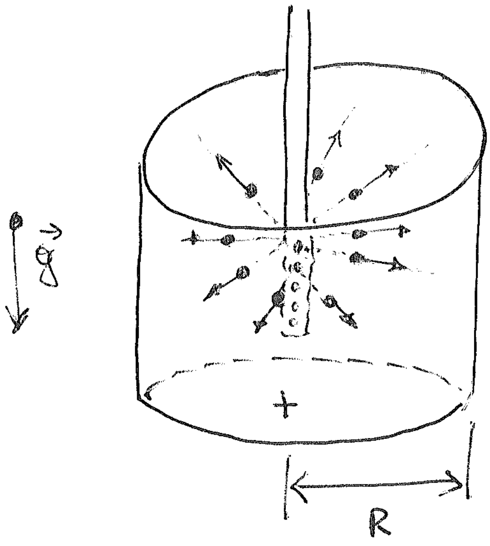
$B = h_B + 1.2\,h_1 + \dfrac{P_{atm}}{\rho_0 g}$

$C = 0.2\,h_1 h_B + \ldots$

$$X_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{B}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{B^2 - 4AC}{4}}}_{< B/2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{B}{2} + \sqrt{\dfrac{B^2 - 4AC}{4}} > 0 \text{ ma anche } > h_B \text{ (NA)} \\[2ex] \dfrac{B}{2} - \sqrt{\dfrac{B^2 - 4AC}{4}} > 0 \text{ ma } < h_B \text{ (ACC)} \end{cases}$$

EXE 2



2.1) Moto orizzontale:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_D + \cancel{\vec{F}_p} + \cancel{\vec{F}_G}$$

$$\frac{dv_{p,x}}{dt} = -\frac{v_{p,x}}{\tau_p}$$

con $\tau_p = \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu}$

$$v_{p,x}(t) = v_0 e^{-t/\tau_p} \Longrightarrow x_p(t) = v_0 \tau_p (1 - e^{-t/\tau_p})$$

$\left[\frac{dx_p}{dt} = v_{p,x}\right]$ con $x_p(t=0) = 0$

Stopping distance: $v_{p,x}(t) = 0$ se $t \to \infty$

$$x_p^{max} = x_p(t \to \infty) = v_0 \tau_p$$

Le gocce colpiscono certamente la parete laterale se $x_p^{max} \geq R$ ovvero se:

$$v_0 \tau_p \geq R \rightarrow \tau_p \geq \frac{R}{v_0} \rightarrow \boxed{D_p \geq \sqrt{\frac{18\mu R}{\rho_p v_0}}}$$

I fori dell'iniettore devono quindi avere diametro minimo:

$$\boxed{d = 2D_p = 6\sqrt{\frac{2\mu R}{\rho_p v_0}}}$$ [15%]

Moto verticale:

$$\vec{F}_I = \vec{F}_D + \vec{F}_p + \vec{F}_g \Rightarrow \frac{dv_{p,y}}{dt} = -\frac{v_{p,y}}{\tau_p} + \hat{\rho} g$$

con $\hat{\rho} = \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_p} > 0$ (in questo caso l'asse verticale è diretto verso il basso)

Sol. particolare $v_{p,y}^* = \hat{\rho} g \tau_p$

Sol. om. assoc. $v_{p,y}^* = C_1 \cdot e^{-t/\tau_p}$

Sol. totale: $v_{p,y}(t) = C_1 \cdot e^{-t/\tau_p} + \hat{\rho} g \tau_p$

C.I. $v_{p,y}(t=0) = 0 \Rightarrow C_1 = -\hat{\rho} g \tau_p$

$$\boxed{v_{p,y}(t) = \hat{\rho} g \tau_p (1 - e^{-t/\tau_p})}$$

$$\boxed{y_p(t) = \int_0^t v_{p,y}(t)\, dt = \hat{\rho} g \tau_p \left[t + \tau_p (1 - e^{-t/\tau_p})\right]}$$

2.2) Massa variabile con tasso di combustione $C = K\pi D_p^2$

Ipotizzando moto orizzontale l'eq. di moto delle gocce diventa:

$$m_p \frac{dv_{p,x}}{dt} + v_{p,x} \frac{dm_p}{dt} = -3\pi \mu v_{p,x} D_p$$

Con $m_p = \rho_p \frac{\pi D_p^3}{6}$ ovvero:

$$\frac{dm_p}{dt} = \rho_p \frac{\pi}{6} \frac{dD_p^3}{dt} = \rho_p \frac{\pi}{\cancel{6}_2} \cancel{3} D_p^2 \frac{dD_p}{dt} = \frac{\pi}{2} \rho_p D_p^2 \frac{dD_p}{dt}$$

ma anche:

$$\frac{dm_p}{dt} = \cancel{\dot{m}_{in}}^{\,0} - \dot{m}_{out} = -C = -K\pi D_p^2$$

Pertanto: $\frac{\pi}{2} \rho_p \cancel{D_p^2} \frac{dD_p}{dt} = -K\pi \cancel{D_p^2} \Rightarrow \boxed{\frac{dD_p}{dt} = -\frac{2K}{\rho_p}}$ (1)

Legge di variazione di D_p nel tempo

Dalla (1) si ricava:

$$dt = -\frac{\rho_p}{2K} dD_p = -C_i \cdot dD_p \; (*)$$

Si può scrivere:

$$\frac{dv_{p,x}}{dt} = \frac{1}{m_p}\left[-3\pi\mu v_{p,x} D_p - v_{p,x} \frac{dm_p}{dt}\right]$$

$$= -\frac{18\mu}{\rho_p D_p^2} v_{p,x} + \frac{K\pi D_p^2}{\rho_p \frac{\pi D_p^3}{6}} v_{p,x}$$

$$= \left(-\underbrace{\frac{18\mu}{\rho_p}}_{\alpha} \cdot \frac{1}{D_p^2} + \underbrace{\frac{6K}{\rho_p}}_{\beta} \cdot \frac{1}{D_p}\right) v_{p,x}$$

$$\frac{dv_{p,x}}{v_{p,x}} = \left(-\alpha \frac{1}{D_p^2} + \beta \frac{1}{D_p}\right) dt$$

Usando la relazione (*):

$$\int_{v_{p,x}(t=0)}^{v_{p,x}(t)} \frac{dv_{p,x}}{v_{p,x}} = \left(-\alpha \frac{1}{D_p^2} + \beta \frac{1}{D_p}\right)(-G\, dD_p)$$

$$= \int_{D_p(t=0)}^{D_p(t)} \left(\alpha \cdot G \frac{1}{D_p^2} - \beta \cdot G \frac{1}{D_p}\right) dD_p$$

$$\ln v_{p,x} \Big|_{v_0}^{v_{p,x}(t)} = -\alpha G \cdot \frac{1}{D_p}\Big|_{D_i}^{D_p(t)} - \beta \cdot G \ln D_p \Big|_{D_i}^{D_p(t)}$$

$$\ln\left[\frac{v_{p,x}(t)}{v_0}\right] = -\frac{18\mu}{\cancel{\rho_p}} \cdot \frac{\cancel{\rho_p}}{2k}\left(\frac{1}{D_p(t)} - \frac{1}{D_i}\right)$$

$$- \frac{6\cancel{k}}{\cancel{\rho_p}} \cdot \frac{\cancel{\rho_p}}{2\cancel{k}} \ln\left[\frac{D_p(t)}{D_i}\right]$$

$$= -\frac{9\mu}{k}\left(\frac{1}{D_p(t)} - \frac{1}{D_i}\right) - 3 \ln\left[\frac{D_p(t)}{D_i}\right]$$

$$\boxed{v_{p,x}(t) = v_0 \cdot \left(\frac{D_p(t)}{D_i}\right)^{-3} \cdot \exp\left[-\frac{9\mu}{k}\left(\frac{1}{D_p(t)} - \frac{1}{D_i}\right)\right]}$$

Quando $D_p(t) = 0.5 D_i$ si ha:

$$v_{p,x}(t) = v_0 \cdot (0,5)^{-3} \cdot \exp\left[-\frac{9\mu}{k}\left(\frac{2}{D_i} - \frac{1}{D_i}\right)\right]$$

$$\boxed{v_{p,x}(t) = 8 v_0 \cdot \exp\left(-\frac{9\mu}{K D_i}\right)}$$

[20%]

VELOCITÀ DELLE GOCCE QUANDO IL DIAMETRO SI È DIMEZZATO