FLUIDODINAMICA - AA 2006/2007

Secondo Compito Intermedio - Durata 2 ore - Libri Chiusi

30 Novembre 2006

1

Il flusso di un fluido non viscoso all'interno di una cella bi-dimensionale quadrata di lato L può essere descritto dalla seguente funzione di corrente: $\Psi = U_o L \sin(\pi x/L)\sin(\pi y/L)$, ove U_0 è un parametro assegnato avente le dimensioni di una velocità .

1. Determinare l'espressione per le componenti di velocità v_x e v_y del fluido. [5%]
2. Disegnare l'andamento del profilo di velocità e le linee di corrente (iso-Ψ) all'interno della cella. [5%]
3. Verificare che il fluido è incomprimibile. [5%]
4. Verificare se il flusso è irrotazionale o meno. [5%]
5. Calcolare la portata specifica netta Q/W, espressa in $[m^2/s]$, circolante all'interno della cella. [10%]

2

Un condensatore piano è costituito da una lastra verticale di larghezza W $[m]$ e lunghezza L $[m]$ mantenuta a temperatura costante sulla quale condensa il vapor d'acqua.

1. Semplificare le equazioni di continuità e Navier-Stokes per il caso in esame, indicando chiaramente le ipotesi semplificative adottate. [5%]
2. Calcolare l'espressione per lo sforzo di taglio, $\tau_{xy}(x, y)$. [10%]
3. Per misurare il tasso di condensazione q si pratica una incisione ad una distanza $x = L/2$ dall'inizio della lastra e si estrae tutta la portata, che risulta pari a $Q(x = L/2) = Q_{ex}$ $[m^3/s]$. Supponendo che lo spessore a inizio lastra ($x = 0$) sia nullo e che il vapore condensi con tasso costante q $[m^3/m^2 s]$, ricavare l'espressione di q, della portata specifica Γ $[kg/m \cdot s]$ e dello spessore del film δ in corrispondenza dell'incisione (ovvero in funzione di Q_{ex}). [15%]
4. Calcolare il tempo T impiegato dal fluido per percorrere la lastra verticale dal punto di inizio ($x = 0$) fino all'incisione ($x = L/2$). [10%]

3

Un getto d'acqua (densità ρ $[kg/m^3]$) avente diametro d $[m]$ e velocità $v = 5$ m/s cade su una lastra piana orizzontale posta ad una distanza $h = 0.3$ m. Ipotizzando che il getto sia stazionario ed abbia sezione costante ed assumendo che le perdite per attrito siano trascurabili, si chiede di:

1. determinare la forza F esercitata dal getto sulla piastra quando questa è ferma; [10%]
2. determinare la potenza trasmessa dal getto alla piastra, P_{tr}, nell'ipotesi che la piastra possa traslare verso il basso con velocità u $[m/s]$; [10%]
3. determinare l'efficienza η definita come rapporto tra potenza trasmessa dal getto alla piastra e potenza resa disponibile (ovvero fornita) dal getto nell'ipotesi che la velocità di traslazione verso il basso della piastra sia $u = 2$ m/s. [10%]

Continuità $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$ *Navier-Stokes* $\rho\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right)$

Equazione di Bernoulli (forma differenziale) $\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(\alpha v^2) + g dh + \dfrac{\mathrm{d}p}{\rho} = \delta w_s - \mathrm{d}l_v$

Conservazione della quantità di moto $\mathbf{0} = w(\beta_1 \mathbf{v}_1 - \beta_2 \mathbf{v}_2) + p_1 \mathbf{A}_1 - p_2 \mathbf{A}_2 - \mathbf{F} + \left(\int_{z_1}^{z_2} \rho A \mathrm{d}z\right) \mathrm{g}$

Relaz. di Cauchy-Riemann $v_x = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial y}$, $v_y = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial x}$ *Vorticità* $\omega_k = \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i} - \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$

II° COMPITO INTERMEDIO

(FLUIDODINAMICA - 30/11/2006)

EXE 1.

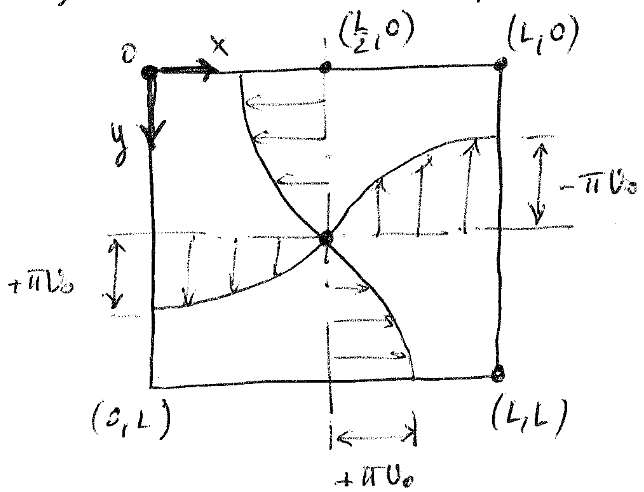
$$\psi = U_0 L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$$ FUNZIONE DI FLUSSO

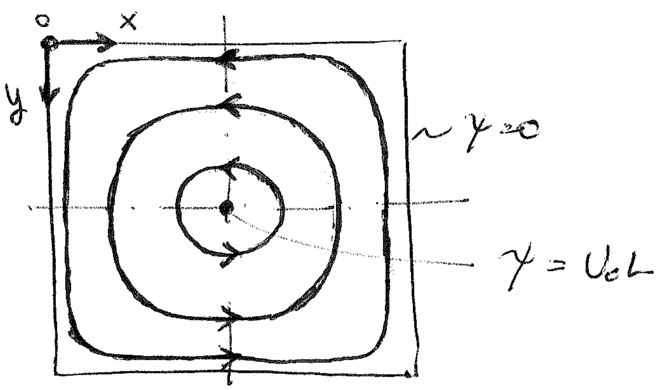
1.1) Calcolo delle componenti di velocità:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\pi U_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right)$$

$$v_y = +\frac{\partial \psi}{\partial x} = \pi U_0 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$$

1.2) Andamento del profilo di velocità e linee iso-ψ:





1.3) Verifica incomprimibilità:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\pi U_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\pi U_0 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)\right]$$

$$= -\frac{\pi^2 U_0}{L}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) + \frac{\pi^2 U_0}{L}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) = 0$$

1.4) Verifica irrotazionalità:

GIRA →

$$\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$= \pi U_0 \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]}_{-\frac{\pi}{L}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)} + \pi U_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left[\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right)\right]}_{-\frac{\pi}{L}\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)}$$

$$= -\frac{\pi^2 U_0}{L}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) - \frac{\pi^2 U_0}{L}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$$

$$= -\frac{2\pi^2 U_0}{L}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \neq 0$$

Il flusso e' irrotazionale (e pertanto non ammette funzione potenziale ϕ).

1.5) Calcolo della portata Q/w circolante nella cella:

I° metodo: utilizzo della funzione di corrente ψ

$$\frac{Q}{w} = \psi_{max} - \psi_{min} = U_0 L$$

essendo $\psi_{max} = \psi\left(x = \frac{L}{2}, y = \frac{L}{2}\right) = U_0 L$

$\psi_{min} = \psi(x=0, y) = \psi(x, y=0) = 0$

↳ ψ e' minima sul bordo della cella!

II° metodo: tramite integrazione del profilo di velocità lungo una semisezione della cella.

$$\frac{Q}{w} = \int_0^{L/2} v_x\Big|_{x=\frac{L}{2}} dy = \underbrace{-\pi U_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\Big|_{x=\frac{L}{2}}}_{=1} \int_0^{L/2} \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) dy$$

GIRA

$$\frac{Q}{W} = -\pi V_0 \underbrace{\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)\Bigg|_0^{L/2}}_{=1} \cdot \frac{L}{\pi} = -V_0 L$$

Il segno tiene conto che, lungo la sezione scelta, il flusso è contrario all'asse X.

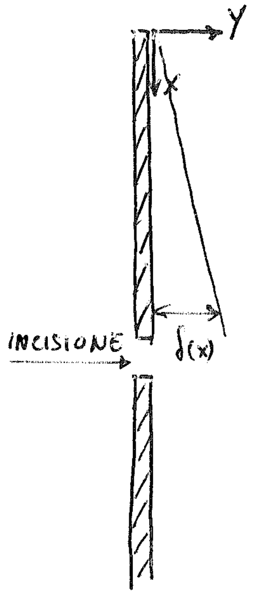
Scegliendo una sezione orizzontale:

$$\frac{Q}{W} = \int_{L/2}^{L} v_y\Big|_{y=\frac{L}{2}} dx = \pi V_0 \underbrace{\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)\Bigg|_{y=\frac{L}{2}}}_{=1} \cdot \underbrace{\int_{\frac{L}{2}}^{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx}_{\underbrace{\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\Big|_{L/2}^{L}}_{\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} = -1} \cdot \frac{L}{\pi}}$$

$$= -V_0 L$$

In modulo: $\boxed{\dfrac{Q}{W} = V_0 L}$

EXE 2.



2.1) Lastra verticale di dimensioni $W \times L$

Film cadente che si forma per condensaz.

Spessore del film: $\delta(x) \ll L$

Risulta: $\boxed{Re \, \dfrac{\delta(x)}{L} \ll 1}$

Il problema può essere risolto utilizzando la <u>teoria della lubrificazione</u>

Eq. continuità : $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

Eq. NS_x : $\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$

Eq. NS_y : $\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right)$

Per semplificare le equaz approssimate, si possono utilizzare le seguenti ipotesi:

- flusso stazionario : $\partial \cdot / \partial t = 0$
- flusso bidimensionale : $\partial \cdot / \partial z = 0$ e $v_z = 0$
- $v_x(x,y) \neq 0$ e $v_x(x,y) >> v_y(x,y)$

$\Downarrow$

Continuità : $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

NS_x : $0 = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ $\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} << \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)$

NS_y : $0 = - \frac{\partial P}{\partial y} \Longrightarrow P = P(x)$

Si ha anche : $\frac{\partial P}{\partial x} = \cancel{\frac{\partial p}{\partial x}}^{0} + \rho g \frac{\partial h}{\partial x} = \rho g \cdot (-1) = - \rho g$

2.2) Calcolo del profilo di velocità e del taglio:

Dalle NS_x : $0 = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) = - \frac{\rho g}{\mu}$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\rho g}{\mu} y + C_1 \longrightarrow v_x(x,y) = -\frac{\rho g}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2$$

C.C. #1 : $v_x(x, y=0) = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$

C.C. #2 : $\tau_{xy}(x, y=\delta(x)) = 0 \Rightarrow \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}(x, y=\delta(x)) = 0$

$$\mu\left(-\frac{\rho g}{\mu} y + C_1\right)\Big|_{y=\delta(x)} = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{\rho g}{\mu}\delta(x)}$$

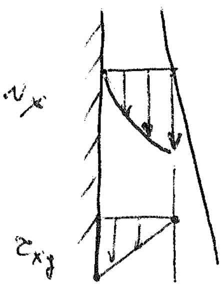
$$\Downarrow$$

$$\boxed{v_x(x,y) = \frac{\rho g}{2\mu}\left[2\delta(x) y - y^2\right]}$$ PROFILO DI VELOCITA'

→ Calcolo del taglio :

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\rho g y + \mu C_1 = -\rho g y + \rho g \delta(x)$$

$$\boxed{\tau_{xy} = \rho g\left[\delta(x) - y\right]}$$



$$\tau_w = \tau_{xy}\big|_{y=0} = \rho g \delta(x)$$

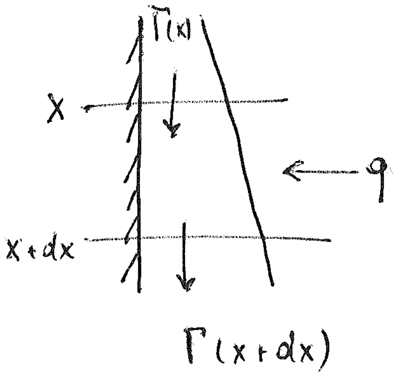
2.3) Calcolo del tasso di condensazione nota la portata volumetrica $Q(x=L/2)$

$$Q = \int_0^W \int_0^{\delta(x)} v_x(x,y)\, dy\, dz = \frac{\rho g}{2\mu} W \int_0^{\delta(x)} \left[2\delta(x) y - y^2\right] dy =$$

$$= \frac{\rho g}{2\mu} W \left[\delta(x) y^2 - y^3/3\right]\Big|_0^{\delta(x)} = \frac{\rho g}{2\mu} W \left[\delta^3(x) - \delta^3(x)/3\right] = \frac{\rho g}{3\mu}\delta^3(x) \cdot W$$

$$\boxed{\frac{Q(x)}{W} = \frac{\rho g}{3\mu} \delta^3(x)} \Rightarrow \Gamma(x) = \rho \frac{Q(x)}{W} = \frac{\rho^2 g}{3\mu} \delta^3(x)$$

Vale anche:



$$\Gamma(x) = \Gamma(x+dx) - q \cdot \rho \cdot dx$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{kg}{ms} \qquad \frac{kg}{ms} \qquad \frac{m^3}{m^2 s}$$

$$\frac{\Gamma(x+dx) - \Gamma(x)}{dx} = \rho q \xrightarrow{\lim dx \to 0} \boxed{\frac{d\Gamma(x)}{dx} = \rho q}$$

Integrando: $\displaystyle\int_{\Gamma(x=0)}^{\Gamma(x)} d\Gamma(x) = \rho q \int_0^x dx$

$$\Gamma(x) = \cancelto{0}{\Gamma(x=0)} + \rho q x$$

$$\boxed{\Gamma(x) = \rho q x}$$

In corrispondenza dell'incisione:

$$Q\left(x = \frac{L}{2}\right) = Q \Rightarrow \boxed{\Gamma\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{\rho Q}{W}} \Rightarrow \boxed{\delta\left(x = \frac{L}{2}\right) = \sqrt[3]{\frac{3\mu\rho Q}{\rho^2 g W}}}$$

$$\Downarrow$$

$$q = \frac{\Gamma(x = L/2)}{\rho \cdot \frac{L}{2}} = \frac{2\left(\rho \frac{Q}{W}\right)}{\rho L}$$

$$\boxed{q = \frac{2Q}{WL}}$$ TASSO DI CONDENSAZIONE

2.4) Calcolo del tempo T :

La velocità media sulla sezione è :

$$\langle v_x(x,y)\rangle = \frac{1}{\delta(x)}\int_0^{\delta(x)} v_x(x,y)\,dy = \frac{1}{\delta(x)}\cdot\frac{\rho g}{2\mu}\int_0^{\delta(x)}\left[2\delta(x)y - y^2\right]dy$$

$$= \frac{1}{\delta(x)}\cdot\frac{\rho g}{2\mu}\underbrace{\left[\delta^3(x) - \frac{\delta^3(x)}{3}\right]}_{\frac{2}{3}\delta^3(x)} = \frac{\rho g}{3\mu}\delta^2(x)$$

Lo spazio percorso è $dS = \langle v_x(x,y)\rangle\,dt$ ovvero :

$$dx = \frac{\rho g}{3\mu}\delta^2(x)\,dt \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{\delta^2(x)} = \frac{\rho g}{3\mu}\,dt} \quad (1)$$

Per poter integrare l'eq. (1) serve un espressione per lo spessore $\delta(x)$ in funzione di x. Dalle relaz. del punto precedente :

$$\left.\begin{aligned}\Gamma(x) &= \frac{\rho^2 g}{3\mu}\delta^3(x)\\ \Gamma(x) &= \rho g x\end{aligned}\right\} \quad \rho g x = \frac{\rho^2 g}{3\mu}\delta^3(x) \Rightarrow \boxed{\delta(x) = \sqrt[3]{\frac{3\mu g}{\rho g}x}}$$

$$\text{Pertanto } \delta^2(x) = \left(\frac{3\mu g}{\rho g}x\right)^{2/3} = K\cdot x^{2/3} \quad \text{con } K \equiv \left(\frac{3\mu g}{\rho g}\right)^{2/3}$$

L'eq. (1) diventa :

$$\int_0^{L/2}\frac{dx}{K\cdot x^{2/3}} = \frac{\rho g}{3\mu}\int_0^{T} dt$$

T → tempo necessario per percorrere la lastra fino all'incisione

$$\frac{1}{k}\int_0^{L/2} x^{-2/3}\,dx = \frac{\rho g}{3\mu}T \Rightarrow \frac{3\mu}{\rho g k}\underbrace{\left(3x^{1/3}\right)\Big|_0^{L/2}}_{3\sqrt[3]{\frac{L}{2}}} = T$$

$$T = \frac{9\mu}{\rho g k}\cdot\sqrt[3]{\frac{L}{2}} = \frac{9\mu}{\rho g}\cdot\left(\frac{\rho g}{3\mu q}\right)^{2/3}\cdot\sqrt[3]{\frac{L}{2}}$$

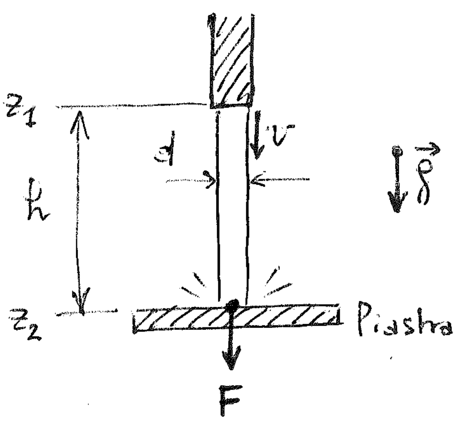
$$= \sqrt[3]{\frac{L}{2}\left(\frac{\rho g}{3\mu q}\right)^2\left(\frac{9\mu}{\rho g}\right)^3} = \sqrt[3]{\frac{L}{2}\,\frac{81\,\mu}{\rho g}\cdot\frac{1}{q^2}}$$

Si trova:

$$\boxed{T = \sqrt[3]{\frac{81}{2}\cdot\frac{\mu L}{\rho g}\cdot\frac{1}{q^2}}}$$

— o —

EXE 3



Getto circolare verticale che impatta sulla lastra piana orizzontale in figura, posta a distanza h dall'ugello che genera il getto

3.1) Calcolo della forza F esercitata dal getto sulla piastra

$$0 = \dot{m}\left(\beta_1\vec{v}_1 - \beta_2\vec{v}_2\right) + p_1\vec{A}_1 - p_2\vec{A}_2 - \vec{F} + \left(\int_{z_1}^{z_2}\rho A\,dz\right)\vec{g}$$

In questo caso, ci interessa la comp. dell'equazione di conservazione della q.d.m. in direzione verticale.

Assumendo:

- $P_1 = P_2 = P_{atm}$ per getto libero in atmosfera
- $\beta_1 = \beta_2 = 1$ per getto libero in atmosfera
- $A_1 = A_2 = \frac{\pi d^2}{4}$ per getto con sezione costante
- $v_1 = v$ (velocità del getto alla sezione z_1)
- $v_2 = u = 0$ (velocità del getto alla sezione z_2)

si ha:

$$0 = \dot{m} v - F + \rho g A \underbrace{\int_{z_1}^{z_2} dz}_{h}$$

$$F = \dot{m} v + \rho g \underbrace{A h}_{\text{Volume del getto}}$$

Essendo $\dot{m} = \rho v A$ si ottiene:

$$(1) \quad \boxed{\begin{aligned} F &= \rho v^2 \frac{\pi d^2}{4} + \rho g h \frac{\pi d^2}{4} \\ &= \rho \frac{\pi d^2}{4} (v^2 + gh) \end{aligned}}$$

FORZA PRODOTTA DAL GETTO VERTICALE SULLA PIASTRA FERMA

3.2) Calcolo della potenza trasmessa dal getto alla piastra in movimento, P_{tr}:

Se la piastra si muove verso il basso con velocità u, l'eq. di conservazione della q.d.m. fornisce:

GIRA ⟶

$$0 = \dot m(v-u) - F + \rho g A \cdot h$$

$$F = \dot m(v-u) + \rho g A h$$

Essendo $\dot m = \rho(v-u)\cdot A$ si ottiene:

$$F = \rho(v-u)^2\frac{\pi d^2}{4} + \rho g h\frac{\pi d^2}{4}$$

$$= \rho\frac{\pi d^2}{4}\left[(v-u)^2 + g h\right]$$

h è la distanza coperta dal getto: se la piastra si muove, h cambia!

Per definizione: $\boxed{P_{tr} = F\cdot u = \rho\frac{\pi d^2}{4}\left[(v-u)^2+gh\right]u}$ (2)

3.3) Calcolo dell'efficienza η:

(3) $\boxed{\eta \triangleq \frac{P_{tr}}{P_{fornita}} = \frac{\cancel{\rho\frac{\pi d^2}{4}}\left[(v-u)^2+gh\right]u}{\frac{1}{2}\cancel{\rho}\, v^3\cancel{\frac{\pi d^2}{4}}} = \frac{2u\left[(v-u)^2+gh\right]}{v^3}}$

essendo $P_{fornita} = \frac{dE_k}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dt} = \frac{1}{2}v^2\frac{dm}{dt} = \frac{1}{2}v^2\cdot\dot m$

con $\dot m = \rho v A$.

- Se $v = 5$ m/s, $u = 2$ m/s, $h = 0.3$ m allora:

$$\underline{\underline{\eta}} = \frac{2\cdot 2\left[(5-2)^2 + 9{,}8\cdot 0{,}3\right]}{5^3} \cong \underline{\underline{\mathbf{0{,}38}}}$$

- Dopo un tempo $t = 10$ sec invece: $h = 0{,}3 + 2\cdot 10 = 20{,}3$ m

$$\underline{\underline{\eta}} = \frac{2\cdot 2\left[(5-2)^2 + 9{,}8\cdot 20{,}3\right]}{5^3} \cong 6{,}6 \quad \text{NA!!}$$

L'equazione per l'efficienza η ha senso fisico soltanto finché $\eta \leq 1$. Un tempo di caduta $t = 10$ sec fornisce $\eta = 6,\bar{6} > 1$ che è impossibile.

La condizione di validità è pertanto:

$$\frac{2u\left[(v-u)^2 + gh\right]}{v^3} \leq 1$$

$$2u\left[(v-u)^2 + gh\right] \leq v^3 \qquad (v \neq 0)$$

$$h \leq \left[\frac{v^3}{2u} - (v-u)^2\right] \cdot \frac{1}{g}$$

$$h \leq \left[\frac{5^3}{2 \cdot 2} - (5-2)^2\right] \cdot \frac{1}{9,81}$$

$$\boxed{h \leq 2,268 \text{ m}} \xrightarrow{*} \boxed{t \leq 0,984 \text{ sec}}$$ CONDIZIONE DI VALIDITA' DELL'EQUAZ. (3)

$*$ $h = 0.3 + u \cdot t = 0.3 + 2 \cdot t$

se $\underline{\underline{t = 0,984 \text{ s}}}$ allora $h = 0,3 + 1,968 = 2,268$ m ed $\underline{\eta = 1}$