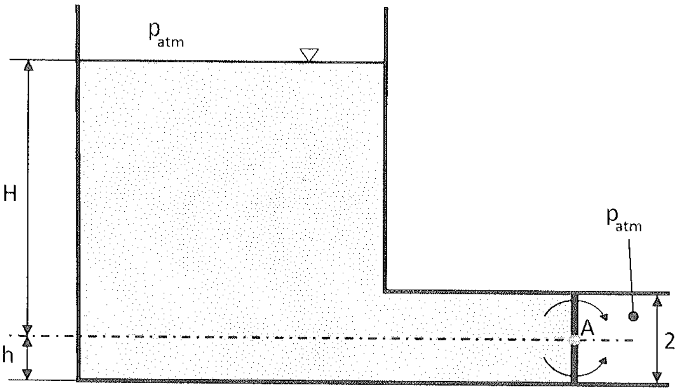
FLUIDODINAMICA - AA 2016/2017

06 Dicembre 2016 - I Compito Intermedio - Durata 2 ore - Libri Chiusi

1

Il serbatoio in figura è riempito di acqua fino al livello $H + h$, ed è collegato ad una tubazione laterale, avente sezione quadrata di lato $2h$. Per svuotare il serbatoio la tubazione è dotata di una paratia incernierata in A.

1. Disegnare l'incremento di pressione idrostatica internamente al serbatoio. [5%]
2. Derivare l'espressione della forza orizzontale F_{or} prodotta dall'acqua sulla paratia quando questa è chiusa. [5%]
3. Calcolare il momento netto agente sulla paratia, indicando quale sarà il senso di rotazione indotto. [15%]



2

In un impianto industriale, l'operazione di "lavaggio" di gas viene effettuata spruzzando il gas con spray di soluzioni opportune. Un getto bifase caratterizzato da gocce d'acqua aventi diametro iniziale D_0 e velocità iniziale v_0 viene iniettato in una camera contenente i vapori di gas da lavare. Le gocce si muovono solo orizzontalmente (in direzione x) e in regime di Stokes.

1. Calcolare come variano nel tempo la velocità $v_{p,x}(t)$ e la posizione $x_p(t)$ delle gocce, nell'ipotesi che queste abbiano massa m_p costante. [10%]
2. Calcolare la distanza percorsa dalle gocce quando la loro velocità si è dimezzata rispetto al valore iniziale. [5%]
3. A causa delle elevate temperature richieste dall'operazione di lavaggio, parte dell'acqua di cui sono costituite le gocce evapora con tasso $e = k\pi D_p^2$ dove k è il tasso specifico di evaporazione, costante ed espresso in $[kg/m^2 s]$. Calcolare come varia nel tempo la velocità delle gocce in questo caso. [20%]

3

Una corrente di gas viene utilizzata per far salire lungo un piano inclinato (di un angolo α rispetto all'orizzontale) un liquido viscoso (avente densità ρ e viscosità μ note).

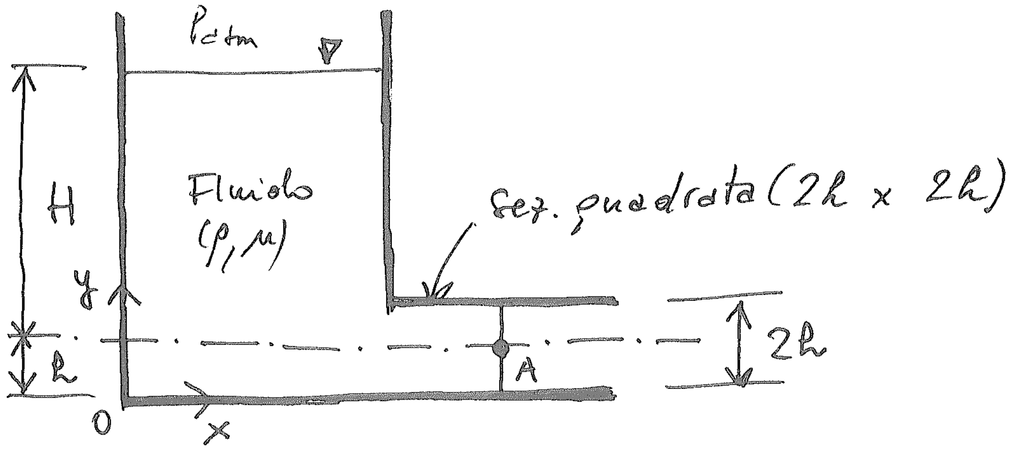
1. Sapendo che la corrente di gas esercita uno sforzo di taglio τ_i all'interfaccia gas-liquido, derivare l'espressione del profilo di velocità nel film e disegnarne il profilo. [15%]
2. Derivare l'espressione della portata volumetrica di liquido per unità di larghezza del piano, Q/W, in funzione dello spessore δ del film. [5%]
3. Determinare l'espressione dello spessore δ^* per il quale risulta massima la portata Q/W trasferita verso l'alto e determinare l'espressione per tale portata massima (ovvero di Q/W quando $\delta = \delta^*$). [10%]
4. Quanto vale la forza viscosa prodotta dal fluido sul piano quando $\delta = \delta^*$? [10%]

Continuità: $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ *Navier-Stokes:* $\rho\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right)$ *Sforzo di taglio:* $\tau_{ij} = \mu\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

Numero di Reynolds e forza di attrito per la particella: $Re_p = \dfrac{\rho|\mathbf{v} - \mathbf{v}_p|D_p}{\mu}$, $\mathbf{F}_D = \dfrac{1}{2}C_D\rho A_p(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p)|\mathbf{v} - \mathbf{v}_p|$

Legge di Stevino: $\mathrm{d}p = -\rho g \mathrm{d}z$

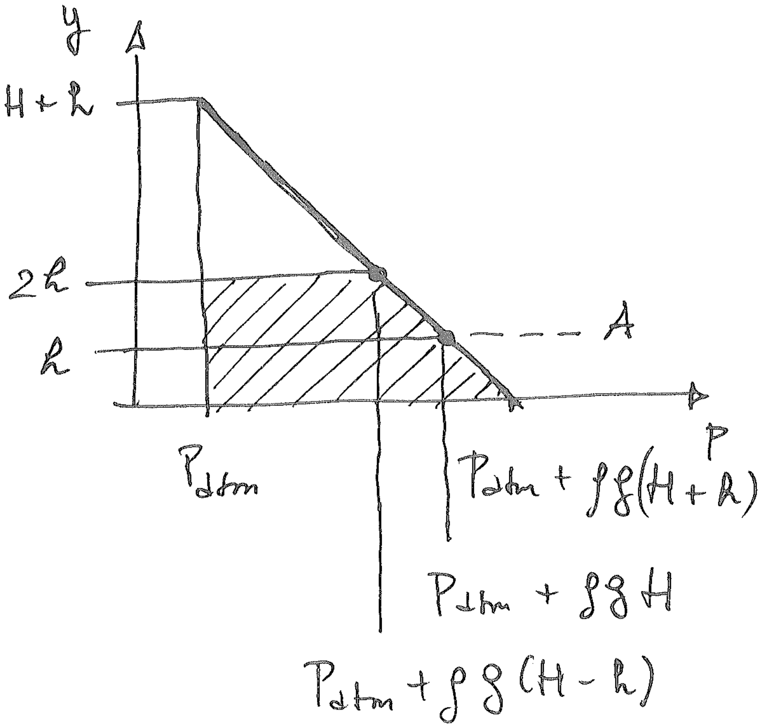
EXE 1



Paratia incernierata in A

con disegno pressione

1. Calcolo della forza orizzontale agente sulla paratia
2. Calcolo del momento netto agente sulla paratia
3. Da che parte ruota? Orario o antiorario?

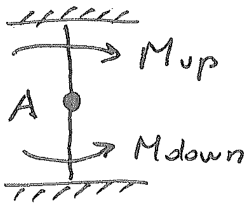


$$\frac{F_{or}}{W} = \frac{\rho g (H-h) + \rho g (H+h)}{2} \, 2h$$

$$= 2 \rho g H \cdot h \quad [10\%]$$

con $W = 2h$!

$$M_{netto} = M_{down} - M_{up}$$



$$M_{down} = \int_0^W \int_0^h \rho g (H + h - y) \cdot (h - y) \, dy \, dz = \ldots =$$

$$= \rho g W \left[(H+h) \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} \right] = \rho g W \left(H \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} \right)$$

- Via alternativa :

$$M_{down} = (\rho g H \cdot h) \cdot W \cdot \frac{h}{2} + \rho g \frac{h \cdot h}{2} \cdot W \cdot \frac{2}{3} h$$

$$= \rho g W \left(\frac{H \cdot h^2}{2} + \frac{h^3}{3} \right) \checkmark$$

$$M_{up} = \int_0^W \int_h^{2h} \rho g (H + h - y) \cdot (y - h) \, dy \, dz = \ldots =$$

$$= \rho g W \left[(H + h) \frac{h^2}{2} - \frac{5}{6} h^3 \right] = \rho g W \left(\frac{H h^2}{2} - \frac{h^3}{3} \right) < M_{down}$$

- Via alternativa :

$$M_{up} = \rho g (H - h) \cdot h \cdot W \cdot \frac{h}{2} + \rho g h \cdot \frac{h}{2} \cdot W \cdot \frac{1}{3} h$$

$$= \rho g W \left[H \cdot \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{2} + \frac{h^3}{6} \right] = \rho g W \left(\frac{H h^2}{2} - \frac{h^3}{3} \right) \checkmark$$

$$M_{TOT} = \rho g W \left(\cancel{\frac{H \cdot h^2}{2}} + \frac{h^3}{3} \right) - \rho g W \left(\cancel{\frac{H \cdot h^2}{2}} - \frac{h^3}{3} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \rho g W h^3 \underset{\uparrow}{=} \frac{4}{3} \rho g h^4 \quad \text{(ANTIORARIO)}$$

$$W = 2h$$

EXE 2

.1) Moto orizzontale, fluido fermo:

$$\frac{dv_{p,x}}{dt} = -\frac{v_{p,x}}{\tau_p} \longrightarrow v_{p,x}(t) = v_0 e^{-t/\tau_p}$$

$$x_p(t) = v_0 \tau_p (1 - e^{-t/\tau_p}) \qquad [10\%]$$

.2) $$v_{p,x}(t) = \frac{v_0}{2} \rightarrow \frac{v_0}{2} = v_0 e^{-t/\tau_p} \rightarrow e^{-t/\tau_p} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{x_p(t) = \frac{1}{2} v_0 \tau_p} \qquad [5\%]$$

2.3) $$m_p \frac{dv_{p,x}}{dt} + v_{p,x} \frac{dm_p}{dt} = -3\pi\mu v_{p,x} D_p$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dm_p}{dt} &= \frac{3\pi\rho_p}{6} D_p^2 \frac{dD_p}{dt} \\ \frac{dm_p}{dt} &= -C = -k\pi D_p^2 \end{aligned}\right\} \quad \frac{dD_p}{dt} = -\frac{2k}{\rho_p}$$

$$dt = -\frac{\rho_p}{2k} dD_p \quad *$$

$$\frac{dv_{p,x}}{dt} = -\frac{3\cancel{\pi}\mu D_p}{\rho_p \frac{\cancel{\pi} D_p^3}{6}} v_{p,x} + \frac{k\cancel{\pi} D_p^2}{\rho_p \frac{\cancel{\pi} D_p^3}{6}} v_{p,x}$$

$$= v_{p,x}\left(-\frac{18\mu}{\rho_p D_p^2} + \frac{6k}{\rho_p D_p}\right)$$

$$= v_{p,x}\left(-C_1 \cdot D_p^{-2} + C_2 \cdot D_p^{-1}\right) \qquad C_1 = \frac{18\mu}{\rho_p}$$

$$C_2 = \frac{6k}{\rho_p}$$

$$\int_{v_0}^{v_{p,x}(t)} \frac{dv_{p,x}}{v_{p,x}} \overset{*}{=} \left(-C_1 \cdot D_p^{-2} + C_2 \cdot D_p^{-1}\right)\left(-\frac{\rho_p}{2k}\right) dD_p$$

$$= \int_{D_0}^{D_p(t)} \left(+\frac{9\mu}{k} \cdot D_p^{-2} - 3 \cdot D_p^{-1}\right) dD_p$$

$$\ln\left[\frac{v_{p,x}(t)}{v_0}\right] = \frac{g\mu}{k}\left[-D_p^{-1}\Big|_{D_0}^{D_p(t)}\right] - 3\ln\left[\frac{D_p(t)}{D_0}\right]$$

$$= \frac{g\mu}{k}\left(\frac{1}{D_0} - \frac{1}{D_p(t)}\right) + \ln\left[\frac{D_0}{D_p(t)}\right]^3$$

Elevando tutto all'esponenziale:

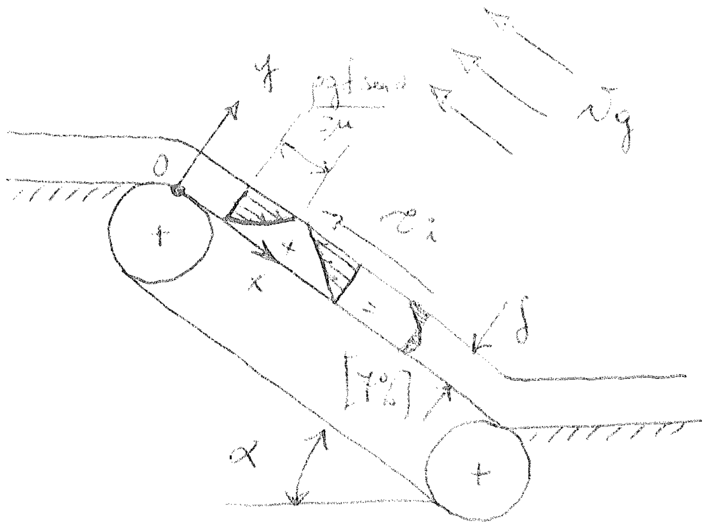
$$\boxed{v_{p,x}(t) = v_0 \exp\left[\frac{g\mu}{k}(\dots) + \ln\left(\frac{D_0}{D_p(t)}\right)^3\right]}$$

$$\boxed{= v_0 \left[\frac{D_0}{D_p(t)}\right]^3 e^{\frac{g\mu}{k}\left(\frac{1}{D_0} - \frac{1}{D_p(t)}\right)}}$$

Con $\boxed{D_p(t) = D_0 - \frac{2k}{\rho_p} \cdot t}$ [20%]

Se $D_p(t) = \frac{D_0}{2}$ allora $v_{p,x}(t) = v_0 \cdot 2^3 \cdot e^{\frac{g\mu}{k}\left(\frac{1}{D_0} - \frac{2}{D_0}\right)}$

$$= 8 v_0 e^{-\frac{g\mu}{k \cdot D_0}}$$



$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \; ; \; \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

$$v_x(y) \neq 0 \; ; \; v_y = v_z = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\text{con } \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g \operatorname{sen}\alpha$$

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu}(-\rho g \operatorname{sen}\alpha)(y^2 - 2\delta \cdot y) - \frac{\tau_i}{\mu} y \quad [8\%]$$

$$\frac{Q}{W} = \int_0^{\delta} v_x(y)\, dy = \frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{3\mu} \delta^3 - \frac{\tau_i}{2\mu} \delta^2 \quad [5\%]$$

$$\left(\frac{Q}{W}\right)_{max} \text{ se } \frac{d(Q/W)}{d\delta} = 0 \Rightarrow \frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{\mu} \delta^2 - \frac{\tau_i}{\mu} \delta = 0$$

$\delta = 0$ N.A.

$$\boxed{\delta = \frac{\tau_i}{\rho g \operatorname{sen}\alpha}} \quad \text{ACC.}$$

$$\boxed{\left.\frac{Q}{W}\right|_{\delta = \frac{\tau_i}{\rho g \operatorname{sen}\alpha}}} = \frac{1}{3\mu} \cdot \frac{\tau_i^3}{(\rho g \operatorname{sen}\alpha)^2} - \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\tau_i^3}{(\rho g \operatorname{sen}\alpha)^2} = -\frac{1}{6\mu} \cdot \frac{\tau_i^3}{(\rho g \operatorname{sen}\alpha)^2}$$

(Negativo, ovvero diretta verso l'alto) [4%

Forza viscosa agente sul piano:

$$F_\tau = \tau_w \cdot A_{lat} = \mu \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0} \cdot LW$$

con $$\left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0} = -\frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{\mu} (y-\delta)\Big|_{y=0} - \frac{\tau_i}{\mu}$$

$$F_\tau = (\rho g \operatorname{sen}\alpha \cdot \delta - \tau_i) \cdot LW$$

Se $\delta = \frac{\tau_i}{\rho g \operatorname{sen}\alpha}$ allora $F_\tau = 0$!!! ⊛

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu}(-\rho g \operatorname{sen}\alpha)\left(y^2 - 2y \cdot \frac{\tau_i}{\rho g \operatorname{sen}\alpha}\right) - \frac{\tau_i}{\mu} y$$

$$= \frac{1}{2\mu}(-\rho g \operatorname{sen}\alpha) y^2 + \cancel{\frac{\tau_i}{\mu} y} - \cancel{\frac{\tau_i}{\mu} y}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{\mu} \cdot y \quad (= 0 \text{ se } y = 0 !)$$

Questo⊛ accade perché il profilo di velocità ha derivata (ovvero pendenza) nulla alla parete!