
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE

DIPARTIMENTO DI ENERGETICA E MACCHINE



CORSO DI FLUIDODINAMICA E TURBOLENZA

RACCOLTA DI APPUNTI DELLE LEZIONI

A. Soldati

A.A 2007 - 2008

Indice

1	Capitolo 1	1
1.1	Principio di Conservazione	1
1.2	Conservazione della Massa	1
1.3	Derivata Sostanziale	3
1.4	Conservazione della Quantità di Moto	3
1.5	Fluidi Newtoniani	6
1.6	Equazioni di Navier-Stokes	7
1.7	Conservazione dell'Energia	7
1.8	Equazione dell'Energia Meccanica	9
1.9	Equazione di Bernoulli	10
2	Capitolo 2	11
2.1	Campi di Moto Unidirezionali	11
2.2	Moto Piano di Poiseuille	11
2.3	Moto di Poiseuille in Tubazione	12
2.4	Equazione dell'Energia meccanica nel Moto di Poiseuille Laminare	13
3	Capitolo 3	16
3.1	Introduzione al Moto Turbolento	16
3.2	Equazioni per il Moto Turbolento: Componenti Medie e Fluttuanti della Velocità	16
3.3	Equazione della Continuità nel Moto Turbolento	17
3.4	Equazione di Navier-Stokes nel Moto Turbolento (R.A.N.S.)	18
3.5	Gli Stress di Reynolds	20
3.6	Viscosità Turbolenta secondo il Modello di Prandtl	21
4	Capitolo 4	23
4.1	Moto Turbolento in un Tubo	23
4.2	Equazione del Trasporto di Energia: Caso Turbolento	27
4.3	Energia Cinetica Turbolenta	28
4.4	Modelli a Viscosità Turbolenta	29
4.5	Il Modello $k - \varepsilon$	30
5	Capitolo 5	32
5.1	Lo Strato Limite	32
5.2	Le Equazioni dello Strato Limite: Moto Laminare	34
5.3	Strato Limite Laminare su Parete Piana accelerata istantaneamente	36
5.4	Strato Limite Laminare su Parete Piana	40
5.5	Strato Limite su Lastra Piana: Caso di Moto Turbolento	42

A Elementi di Statistica	45
A.1 Costanti di Forma	45
A.1.1 Media μ	46
A.1.2 Varianza e Deviazione Standard	46
A.1.3 Asimmetria (Skewness)	46
A.1.4 Flatness (Curtosi)	47
A.2 Funzioni One-point-statistic, Two points statistic	47
A.2.1 Covarianza	49
A.2.2 Autocorrelazione e Correlazione	50

Elenco delle figure

1	Volume di controllo per il bilancio di materia in coordinate cartesiane.	1
2	Volume di controllo per il bilancio di quantità di moto in coordinate cartesiane.	4
3	Flusso piano di Poiseuille.	11
4	Flusso di Poiseuille in Tubazione.	13
5	Andamento dei contributi di energia nel moto laminare	15
6	Velocità media, velocità istantanea e fluttuazione secondo il metodo di Reynolds	17
7	Significato fisico delle tensioni (stress) di Reynolds.	20
8	Andamento delle tensioni di Reynolds, delle tensioni viscosse e delle tensioni totali per flusso turbolento in una tubazione di raggio R .	21
9	Experimental velocity profiles (\circ) calculated by Direct Numerical Simulation (DNS) (\diamond) compared with equations 116 and 118.	25
10	Confronto tra profili di velocità per flusso laminare (i) e turbolento (ii) in tubazione. A parità di velocità media si trovano i profili laminare (i) e turbolento (ii) (sono stati calcolati per numero di Reynolds pari a 10000). A parità di gradiente di pressione si trovano invece i profili laminare (i) e turbolento (iii).	26
11	Profilo di velocità nel moto turbolento: da notare l'appiattimento nella zona centrale rispetto il caso laminare	28
12	Andamento dei contributi di energia nel moto turbolento	29
13	Zone attorno ad un corpo tozzo	32
14	Spessore dello strato limite	33
15	Strato limite fittizio δ^*	33
16	Formazione dello strato limite.	34
17	Profili di velocità su lastra piana	36
18	Profili di velocità simili	37
19	Profilo di velocità in funzione della variabile adimensionale η	39
20	Andamento della velocità nello strato limite in funzione della coordinata adimensionale, η .	41
21	Strato limite turbolento	43
22	Scelta del Δt di campionamento	45

23	Costruzione della pdf (probability density function)	46
24	Deviazione standard	47
25	Asimmetria (Skewness)	48
26	Flatness (Curtosi)	48
27	Segnali tempovarianti sfasati	49
28	Curva della covarianza	50
29	Funzione di autocorrelazione	51
30	Funzione di autocorrelazione time-scale	51
31	Funzione di correlazione length-scale	52

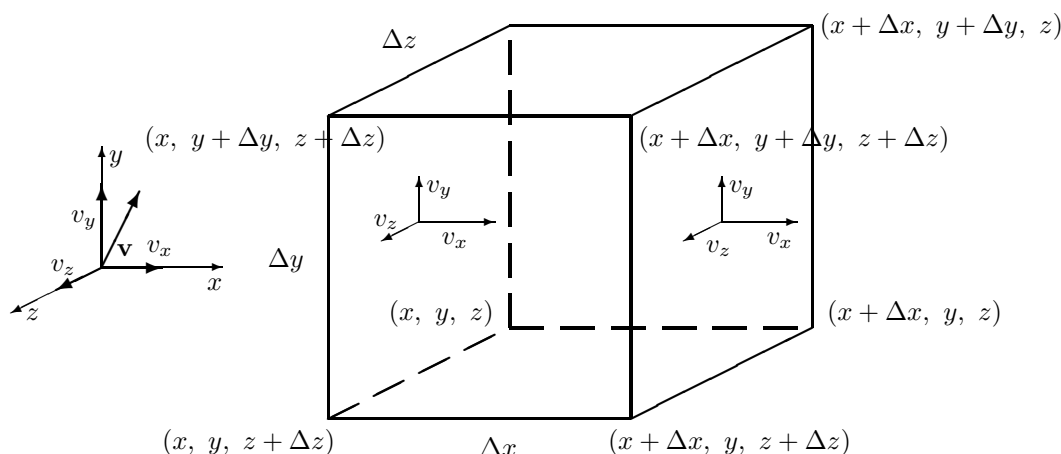


Figura 1: Volume di controllo per il bilancio di materia in coordinate cartesiane.

1 Capitolo 1

1.1 Principio di Conservazione

La struttura dettagliata di un campo di moto e la sua evoluzione nel tempo sono descritte da un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che esprimono la conservazione di grandezze scalari quali la massa e l'energia, o vettoriali, quali la quantità di moto.

In generale, se si considera una parte dello spazio compresa in un volume di controllo, il principio di conservazione di una grandezza Γ può essere espresso nella forma: *La portata di Γ in ingresso al volume di controllo meno la portata in uscita è pari alla variazione nel tempo di Γ nel volume di controllo.* Come si vedrà in seguito, ai termini di portata in ingresso ed in uscita possono affiancarsi termini di scambio attraverso la superficie che delimita il volume di controllo o termini di generazione all'interno del volume di controllo.

1.2 Conservazione della Massa

Con riferimento alla figura 1, se si utilizza come volume di controllo ΔV il parallelepipedo di lati Δx , Δy e Δz , la massa contenuta in ΔV è data da $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$ e la sua variazione nel tempo (accumulo) è pari a:

$$\text{Accumulo} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \quad . \quad (1)$$

I flussi in ingresso dalle facce normali all'asse x nelle posizioni x ed $x + \Delta x$ di superficie $\Delta y \Delta z$

sono pari a

$$\begin{aligned} \text{Flusso in ingresso in posizione } x &= \rho v_x |_x \Delta y \Delta z \\ \text{Flusso in uscita in posizione } x + \Delta x &= \rho v_x |_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \quad . \end{aligned} \quad (2)$$

Analoghi flussi possono essere considerati per le altre facce ed il bilancio complessivo di massa dà

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z &= (\rho v_x |_x - \rho v_x |_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z \\ &+ (\rho v_y |_y - \rho v_y |_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z + (\rho v_z |_z - \rho v_z |_{z+\Delta z}) \Delta y \Delta x \quad . \end{aligned} \quad (3)$$

In questa equazione, termini quali $\rho v_x |_{x+\Delta x}$, relativo in questo caso al flusso di massa in direzione x valutato in posizione $x + \Delta x$, possono essere espressi fermandosi al primo termine dello sviluppo in serie di Taylor come:

$$\rho v_x |_{x+\Delta x} = \rho v_x |_x + \left. \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} \right|_x \Delta x \quad . \quad (4)$$

Questa approssimazione è valida per $\Delta x \rightarrow 0$. Procedendo in modo analogo per i termini simili, per $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$, l' eq. (3) diviene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad . \quad (5)$$

L' eq. (5) è chiamata *equazione di continuità* e, in notazione vettoriale, è data da:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad . \quad (6)$$

Un analogo risultato può essere ottenuto con un bilancio di massa effettuato su un volume finito V del campo di moto delimitato da una superficie S . La variazione nel tempo della massa contenuta in V è pari a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \quad .$$

La variazione tra flusso di massa in ingresso ed in uscita è data da

$$- \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad ,$$

dove, il segno negativo è dovuto al fatto che il vettore \mathbf{n} è diretto all'esterno della superficie S . Risulta pertanto:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad , \quad (7)$$

dove, nel termine a sinistra si è invertita l'operazione di derivazione con quella di integrazione. Ricordando il teorema di Gauss, il termine a destra della eq. (7) può essere posto pari a

$$\int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV \quad , \quad (8)$$

per cui,

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0 \quad . \quad (9)$$

Questa equazione è soddisfatta se l'integrando è nullo, permettendo in questo modo di ricavare nuovamente l'equazione di continuità. Nel seguito di questo capitolo, per semplicità, i bilanci di quantità di moto e di energia saranno ricavati solo in forma differenziale. È però utile sottolineare che è sempre possibile usare una derivazione di tipo integrale.

1.3 Derivata Sostanziale

Se si definisce l'operatore

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (10)$$

come *derivata sostanziale* di una funzione, l'eq. (5) può essere scritta come

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (11)$$

Per comprendere il significato dell'operatore D/Dt , si può considerare un elemento di fluido in posizione x, y, z al tempo t . Nell'istante successivo, $t + \Delta t$, la posizione sarà

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{dx}{dt} \Delta t = x(t) + v_x \Delta t \quad (12)$$

e analogamente per le altre coordinate. Se si considera ora una proprietà ξ del fluido che cambia con la posizione e con il tempo si avrà che

$$\xi(t + \Delta t) = \xi(t) + \frac{\partial \xi}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \xi}{\partial z} \Delta z \quad (13)$$

ed essendo $\Delta x = v_x \Delta t$, $\Delta y = v_y \Delta t$, e $\Delta z = v_z \Delta t$, si avrà anche

$$\xi(t + \Delta t) = \xi(t) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + v_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \xi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \Delta t \quad (14)$$

ovvero

$$\frac{D\xi}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + v_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \xi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (15)$$

Pertanto, la derivata D/Dt può essere interpretata come una derivata rispetto al tempo presa con riferimento ad un osservatore che si muove con la velocità di un elemento di fluido.

1.4 Conservazione della Quantità di Moto

La quantità di moto è una grandezza vettoriale che si conserva nelle tre direzioni dando luogo ad una equazione vettoriale ovvero a tre equazioni scalari. Per ognuna delle direzioni, il principio di conservazione stabilisce che *la variazione di quantità di moto nel volume di controllo è pari alla differenza tra la quantità di moto in ingresso e quella in uscita, più la somma di tutte le forze agenti sul volume di controllo*. Lo schema del volume di controllo utilizzato per il bilancio di quantità di moto è mostrato in figura 2.

La quantità di moto secondo x contenuta nel volume di controllo è pari a $\rho v_x \Delta x \Delta y \Delta z$. La sua variazione nel tempo è data da

$$\text{Accumulo di quantità di moto} = \frac{\partial}{\partial t} \rho v_x \Delta x \Delta y \Delta z \quad (16)$$

Il flusso in ingresso, per esempio dalla faccia normale all'asse x , è pari a $\rho v_x \Delta y \Delta z$. La quantità di moto in direzione x associata a questo flusso è pari a $\rho v_x \Delta y \Delta z \cdot v_x |_x$. Analogamente, la quantità di moto in direzione x associata al flusso in ingresso nel volume di controllo dalle facce y

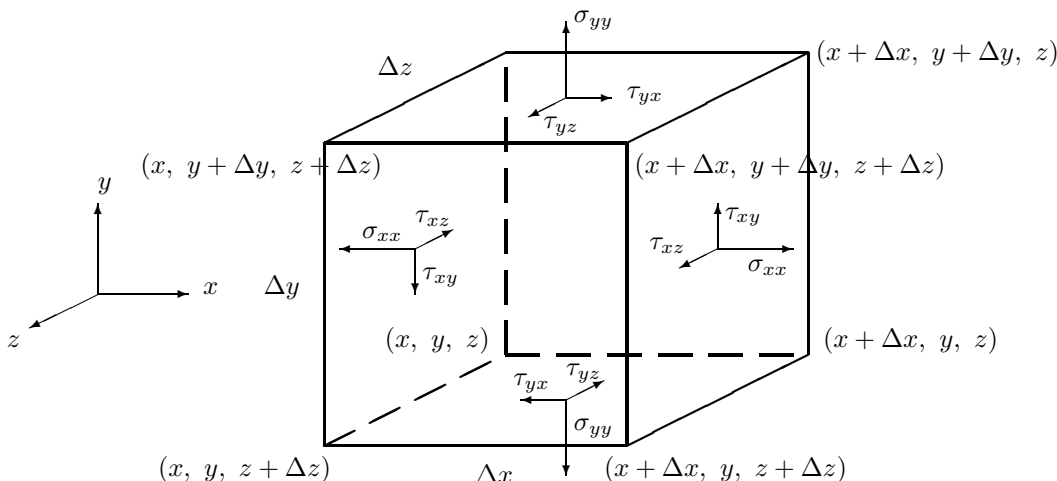


Figura 2: Volume di controllo per il bilancio di quantità di moto in coordinate cartesiane.

e z è pari a $\rho v_y \Delta x \Delta z \cdot v_x|_y$ e $\rho v_z \Delta x \Delta y \cdot v_x|_z$. Se si considerano anche i flussi in uscita, il bilancio fino ad ora effettuato porta alla relazione

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z &= (\rho v_x v_x|_x - \rho v_x v_x|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z) \\ &+ (\rho v_x v_y|_y - \rho v_x v_y|_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z + (\rho v_x v_z|_z - \rho v_x v_z|_{z+\Delta z}) \Delta x \Delta y \\ &+ \text{Somma delle forze agenti secondo } x \end{aligned} \quad (17)$$

Sull'elemento di volume agiscono forze di volume ed in primo luogo la *forza di gravità* che ha componente secondo x pari a $\rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z$. Agiscono inoltre *sforzi normali* e *tangenziali* sulle facce del volume di controllo. La forza che il fluido esterno alla faccia x esercita su questa faccia è pari a $\sigma_x \Delta y \Delta z$. Questa forza ha tre componenti

$$\sigma_x = \sigma_{xx} \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k} \quad , \quad (18)$$

delle quali, σ_{xx} è normale alla superficie, e τ_{xy} e τ_{xz} sono tangenziali. Tra le due possibili convenzioni sui segni è stata adottata la seguente: il fluido dal lato della faccia con valore più grande della coordinata esercita uno sforzo di segno positivo sul fluido che ha valore minore della coordinata. Conseguenza di questa scelta è che gli sforzi normali positivi mettono in tensione il volume di controllo, mentre quelli negativi lo sottopongono a compressione.

Considerando la figura 2, gli sforzi normali e tangenziali che agiscono, ad esempio in direzione x , sulle varie facce del volume di controllo sono σ_{xx} (a x e $x + \Delta x$), τ_{yx} (a y e $y + \Delta y$) e τ_{zx} (a z e $z + \Delta z$). Pertanto, si ha:

sforzi di taglio in direzione x

$$\begin{aligned}
 &= (\sigma_{xx} |_{x+\Delta x} - \sigma_{xx} |_x) \Delta y \Delta z + (\tau_{yx} |_{y+\Delta y} - \tau_{yx} |_y) \Delta x \Delta z \\
 &\quad + (\tau_{zx} |_{z+\Delta z} - \tau_{zx} |_z) \Delta y \Delta x \quad .
 \end{aligned} \tag{19}$$

Considerando i vari termini, il bilancio di quantità di moto in direzione x diviene:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial z} = \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x \quad . \tag{20}$$

Questa equazione può essere anche scritta nella forma:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{Dv_x}{Dt} &= \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\
 &= \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x \quad .
 \end{aligned} \tag{21}$$

Equazioni analoghe possono essere scritte per le componenti della quantità di moto in direzione y e z . In notazione vettoriale, le tre componenti dell'equazione di conservazione della quantità di moto possono essere espresse come

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad , \tag{22}$$

dove $\boldsymbol{\sigma}$ è un tensore ed il prodotto $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ è un vettore. In generale, la componente k -esima del vettore $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ è pari a $\sum_i \partial\tau_{ik}/\partial x_i$.

Le componenti del tensore $\boldsymbol{\sigma}$ sono simmetriche ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ etc.) in virtù del *principio di conservazione della quantità di moto angolare*. Si consideri, infatti, il momento delle forze che impongono una rotazione secondo l'asse z :

momento delle forze attorno a z

$$= \frac{1}{2} (\tau_{xy} |_x + \tau_{xy} |_{x+\Delta x} - \tau_{yx} |_y - \tau_{yx} |_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta y \Delta z \quad . \tag{23}$$

Il momento della quantità di moto dell'elemento di volume è pari

momento della quantità di moto

$$= \int_{\Delta V} \rho r^2 \Omega dx dy dz = \rho \Omega r_g^2 \Delta x \Delta y \Delta z \quad , \tag{24}$$

dove l'integrale è esteso al volume di controllo, r è la distanza dall'asse z , Ω è la velocità angolare di rotazione intorno all'asse z e $r_g^2 = (\Delta x \Delta y / 6)$. La conservazione della quantità di moto angolare impone:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left(\frac{\rho}{6} \frac{d\Omega}{dt} \Delta x \Delta y \right) = \tau_{xy} - \tau_{yx} \quad . \tag{25}$$

Poiché $d\Omega/dt$ deve comunque essere finito, risulta che $\tau_{xy} - \tau_{yx}$ si annulla al limite, ovvero $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Analoghe relazioni possono essere ricavate per rotazioni intorno agli altri assi.

1.5 Fluidi Newtoniani

Per la soluzione dell'equazione di conservazione della quantità di moto è necessario stabilire equazioni costitutive che mettano in relazione il tensore degli sforzi con il campo di velocità. Nei fluidi Newtoniani gli sforzi di taglio sono direttamente proporzionali alle derivate prime del campo di velocità. Se si considera che il moto avvenga solo in direzione x , tra due superfici a distanza Δy si ha

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy} = \tau_{xy} \quad . \quad (26)$$

Se il sistema è fatto ruotare di 90° , così che il moto sia solo in direzione y , si avrà

$$\tau_{xy} = \mu \frac{dv_y}{dx} = \tau_{yx} \quad . \quad (27)$$

Poiché in generale il moto non avviene secondo una direzione soltanto, le equazioni precedenti possono essere generalizzate assumendo

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad . \quad (28)$$

Analoghe relazioni possono facilmente essere trovate per gli altri componenti del tensore degli sforzi.

La derivazione delle equazioni che descrivono gli sforzi normali richiede un trattamento analitico rigoroso che si basa sulle seguenti proprietà dei fluidi Newtoniani:

1. Gli sforzi sono simmetrici.
2. Lo sforzo in una data posizione dipende solo dal valore istantaneo del gradiente di velocità in quella posizione.
3. Gli sforzi sono una funzione lineare del gradiente di velocità.
4. Gli sforzi sono isotropi in assenza di moto.

Sulla base di queste proprietà, si ricavano le seguenti equazioni per gli sforzi normali:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{v} \quad , \quad (29)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{v} \quad , \quad (30)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{v} \quad . \quad (31)$$

La somma di queste equazioni dà

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = -3p + 2\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - 2\mu \nabla \cdot \mathbf{v} = -3p \quad , \quad (32)$$

ovvero

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad . \quad (33)$$

Questa equazione mostra come la pressione sia uno sforzo di compressione pari al valore medio degli sforzi normali agenti sul volume di controllo. Gli sforzi normali possono essere decomposti nella componente di pressione e nei cosiddetti sforzi deviatori:

$$\tau_{xx} = \sigma_{xx} + p = 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{v} \quad . \quad (34)$$

Analoghe equazioni possono essere scritte per le altre componenti.

1.6 Equazioni di Navier-Stokes

Le equazioni di conservazione della quantità di moto sono note come *equazioni di Navier-Stokes*, *N-S*, e, per un fluido Newtoniano la cui viscosità non dipenda dalla posizione, possono essere scritte nella forma (componente secondo x)

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \rho g_x \quad . \quad (35)$$

L'equazione di N-S in forma vettoriale diviene

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3}\mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \quad . \quad (36)$$

È possibile esprimere le equazioni di N-S in forma più compatta introducendo la pressione equivalente, \mathcal{P} , definita come

$$\mathcal{P} = p + \rho gh - \frac{1}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{v} \quad . \quad (37)$$

Utilizzando questa definizione, le equazioni di N-S assumono la forma:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \mathcal{P} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad . \quad (38)$$

1.7 Conservazione dell'Energia

L'energia per unità di massa contenuta in un elemento fluido è costituita dalla somma dell'energia interna, e , l'energia cinetica, $v^2/2$, e l'energia potenziale, gh . Il principio di conservazione dell'energia per un sistema in flusso rappresenta un'estensione del primo principio della termodinamica e può essere enunciato nella forma: *La portata di energia in ingresso meno la portata in uscita più il calore ed il lavoro immesso nell'unità di tempo nel volume di controllo sono pari alla variazione nel tempo dell'energia contenuta nel volume di controllo.*

Questo principio applicato ad un elemento di volume, $\Delta x \Delta y \Delta z$, porta ad identificare i termini seguenti:

$$\text{Accumulo di energia} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2}v^2 + gh \right) \right] \Delta x \Delta y \Delta z \quad ,$$

Flussi convettivi in ingresso e uscita

$$= \Delta y \Delta z \left[v_x \rho \left(e + \frac{1}{2}v^2 + gh \right) \Big|_x - v_x \rho \left(e + \frac{1}{2}v^2 + gh \right) \Big|_{x+\Delta x} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \Delta x \Delta z \left[v_y \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 + gh \right) \Big|_y - v_y \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 + gh \right) \Big|_{y+\Delta y} \right] \\
 & + \Delta x \Delta y \left[v_z \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 + gh \right) \Big|_z - v_z \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 + gh \right) \Big|_{z+\Delta z} \right] ,
 \end{aligned}$$

Ingresso di energia per conduzione termica

$$= \Delta y \Delta z (q_x|_x - q_x|_{x+\Delta x}) + \Delta x \Delta z (q_y|_y - q_y|_{y+\Delta y}) + \Delta x \Delta y (q_z|_z - q_z|_{z+\Delta z}) ,$$

dove q_x , q_y e q_z sono le componenti del vettore \mathbf{q} , che rappresenta il flusso termico per conduzione. Nel caso sia valida la legge di Fourier per la conduzione termica, \mathbf{q} può essere espresso in funzione del gradiente di temperatura come

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad , \quad (39)$$

dove k è la conducibilità termica e T la temperatura.

Per il lavoro per unità di tempo compiuto sull'elemento di volume si ha:

Lavoro per unità di tempo

$$\begin{aligned}
 & = \Delta y \Delta z \{ (\sigma_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z) |_{x+\Delta x} - (\sigma_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z) |_x \} \\
 & + \Delta x \Delta z \{ (\tau_{yx} v_x + \sigma_{yy} v_y + \tau_{yz} v_z) |_{y+\Delta y} - (\tau_{yx} v_x + \sigma_{yy} v_y + \tau_{yz} v_z) |_y \} \\
 & + \Delta x \Delta y \{ (\tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y + \sigma_{zz} v_z) |_{z+\Delta z} - (\tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y + \sigma_{zz} v_z) |_z \} .
 \end{aligned}$$

Il lavoro è prodotto dalle forze viscosse e dalle forze di pressione e può essere calcolato come prodotto tra la componente della forza agente in una data direzione (per esempio: $\sigma_{xx} \Delta y \Delta z$) per lo spostamento in quella direzione in un tempo dt (per esempio: $v_x dt$). Il lavoro per unità di tempo è dato dal prodotto tra la forza e la velocità (per esempio $\sigma_{xx} v_x \Delta y \Delta z$).

Tenuto conto che $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$, dove \mathbf{I} è il tensore diagonale unitario (gli elementi sulla diagonale principale sono unitari e gli altri nulli), il bilancio di energia può essere scritto come

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 + gh \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot p\mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) \quad . \quad (40)$$

Nello sviluppo di questa equazione, è stato utilizzato il concetto di energia potenziale ϕ definita in modo tale che

$$\mathbf{g} = -\nabla \phi \quad , \quad (41)$$

con $\phi = gh$. Si può notare che

$$\rho \frac{D\phi}{Dt} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = -\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \quad , \quad (42)$$

in quanto ϕ è indipendente dal tempo. Il termine $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}$ può essere inteso come lavoro compiuto dalla forza di volume \mathbf{g} .

1.8 Equazione dell'Energia Meccanica

In un sistema in flusso si conserva solo la somma dei tre termini di energia, $e + v^2/2 + gh$, che di seguito sarà indicata come *energia totale* per distinguerla dall'energia meccanica, $v^2/2 + gh$, che non si conserva. È però possibile ricavare dall'equazione di conservazione della quantità di moto un'equazione scalare di solito denominata *equazione dell'energia meccanica*.

A questo fine si esegue il prodotto scalare dell'equazione della quantità di moto per il vettore velocità \mathbf{v} :

$$\rho \mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\mathbf{v} \cdot \nabla p + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \quad . \quad (43)$$

Si può dimostrare che il primo termine di questa equazione è pari a

$$\rho \mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \quad , \quad (44)$$

ovvero alla derivata sostanziale dell'energia cinetica dell'elemento di volume. Si è già notato come

$$-\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} = \rho \frac{D}{Dt} (gh) \quad , \quad (45)$$

pertanto l'equazione (43), riscritta come

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 + gh \right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla p + \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad , \quad (46)$$

mette in relazione le variazioni di energia meccanica (cinetica e potenziale) con l'azione esercitata dalle forze agenti sulla superficie del volume di controllo.

L'equazione di conservazione dell'energia totale può essere riscritta nella forma

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 + gh \right) &= -\nabla \cdot \mathbf{q} - p \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &- \mathbf{v} \cdot \nabla p + \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \quad , \end{aligned} \quad (47)$$

dove si sono sviluppati i due termini $\nabla \cdot p\mathbf{v}$ e $\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v})$. Se dall'equazione 47 si sottrae l'equazione 46, si ricava:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \quad . \quad (48)$$

Questa equazione può essere denominata *equazione dell'energia termica*, in quanto permette di calcolare le variazioni di temperatura causati dalla trasmissione di calore per conduzione ($\nabla \cdot \mathbf{q}$), dalla compressione reversibile ($p \nabla \cdot \mathbf{v}$) e dalla dissipazione viscosa irreversibile ($\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}$). Gli ultimi due termini rappresentano la conversione di energia meccanica in energia termica.

Per un fluido Newtoniano il termine di dissipazione viscosa $\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}$ è dato da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} &= \mu \Phi_v = 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\} . \quad (49)$$

La dissipazione viscosa provoca un innalzamento della temperatura del fluido che nelle applicazioni pratiche è spesso trascurabile.

1.9 Equazione di Bernoulli

Per flusso stazionario e fluido incomprimibile e Newtoniano è abbastanza agevole ricavare dall'equazione dell'energia meccanica l'*equazione di Bernoulli*. Punto di partenza è il prodotto scalare dell'equazione di conservazione della quantità di moto per il vettore velocità. Nelle ipotesi fatte si ha:

$$\rho \mathbf{v}[(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}] = -\mathbf{v} \cdot \nabla(p + \rho gh) + \mu \mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} . \quad (50)$$

Tenuto conto che $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ (fluido incomprimibile), si ha anche:

$$\mathbf{v}[(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}] = \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{v}v^2) \quad (51)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla(p + \rho gh) = \nabla \cdot \mathbf{v}(p + \rho gh) . \quad (52)$$

Integrando i bilanci microscopici sul volume di controllo, si trova:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho gh \right) dV = \mu \int_V \mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} dV . \quad (53)$$

Il teorema di Gauss applicato al membro a sinistra dell'equazione (53) consente di ottenere

$$\int_S \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho gh \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \mu \int_V \mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} dV . \quad (54)$$

Nel caso che il volume di controllo sia delimitato da una superficie impermeabile al fluido e da solo due superfici A_1 e A_2 attraverso le quali il fluido rispettivamente entri ed esca, il membro a sinistra dell'equazione (54) può essere scritto come:

$$\int_S \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho gh \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \Delta \left[\langle v_n \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho gh \right) \rangle_A \right] , \quad (55)$$

dove le parentesi angolari indicano il valor medio sulla superficie A , e $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. Il termine di dissipazione viscosa, a destra nell'eq. (54), può essere posto uguale a:

$$\mu \int_V \mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} dV = -\mu \int_V \Phi_v dV = -l_v w , \quad (56)$$

dove, Φ_v è la funzione di dissipazione e l_v deve essere opportunamente valutato in relazione alla geometria del campo di moto ed agli altri parametri di flusso. Dalle equazioni (55) e (56) si ricava:

$$\Delta \left[\langle v_n \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho gh \right) \rangle_A \right] = -l_v w . \quad (57)$$

Questa è una delle forme nelle quali può essere scritta l'*equazione di Bernoulli*. Nel caso particolare che v_n sia uguale al modulo del vettore velocità v , e che v , ρ e p siano costanti sulle superfici A_1 e A_2 , ricordando che $\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = w$, portata di massa attraverso il volume di controllo, costante per flusso stazionario, l'equazione (57) diviene

$$\Delta \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gh \right) = -l_v . \quad (58)$$

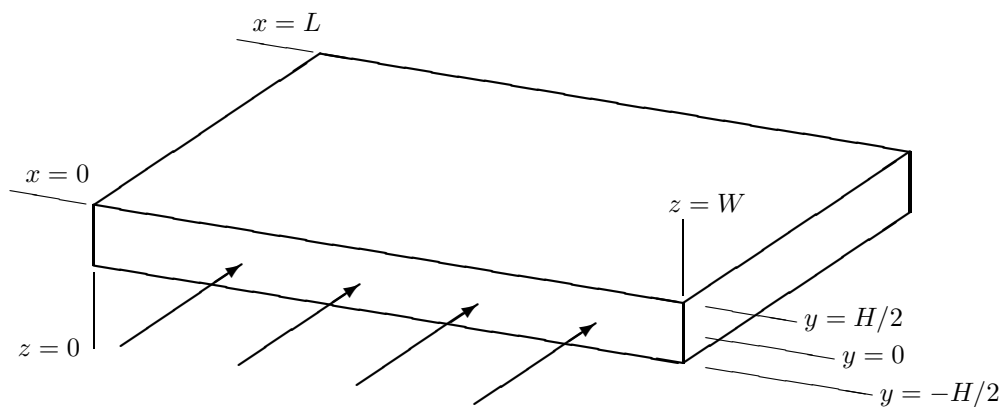


Figura 3: Flusso piano di Poiseuille.

2 Capitolo 2

2.1 Campi di Moto Unidirezionali

La soluzione esatta delle equazioni di Navier-Stokes è possibile in un numero limitato di casi. Tra questi figurano campi di moto stazionari in cui la velocità cambia solo secondo una direzione. L'ipotesi di stazionarietà limita l'analisi al caso di moto laminare.

2.2 Moto Piano di Poiseuille

Il problema è illustrato in figura 3 e consiste nel flusso di un fluido Newtoniano incomprimibile tra due pareti piane e parallele di dimensioni molto grandi rispetto alla loro distanza. Il flusso è determinato da un gradiente di pressione ed avviene secondo una direzione che corrisponde all'asse x . Si assume che il moto sia completamente sviluppato, cioè che siano trascurabili gli effetti di imbocco. L'indipendenza del campo di moto dalla coordinata x porta a

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \quad . \quad (59)$$

Avendo scelto l'asse x secondo la direzione del moto, si ha anche

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad ; \quad (60)$$

segue che le componenti di \mathbf{v} dipendono solo dalla coordinata y . Si può inoltre intuitivamente ipotizzare che $v_z = 0, v_y = 0, v_x = v_x(y)$. Queste assunzioni soddisfano l'equazione di continuità. Le equazioni di N-S in questo caso divengono:

$$-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad (61)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} = 0 \quad , \quad (62)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} = 0 \quad , \quad (63)$$

dove si è posto $\mathcal{P} = p + \rho gh$. Dalle equazioni (62) e (63) risulta chiaro che $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x)$. L' eq. (61) può essere allora scritta come

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{d\mathcal{P}}{dx} \quad . \quad (64)$$

In questa equazione il termine a sinistra è solo funzione di y e quello a destra solo di x . Questo è possibile solo se i due termini sono costanti. In questo caso, si può integrare agevolmente l'eq. (64) e ricavare per v_x

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{d\mathcal{P}}{dx} y^2 + c_1 y + c_2 \quad . \quad (65)$$

Se si tiene conto delle condizioni al contorno

$$y = \pm \frac{H}{2} \longrightarrow v_x = 0 \quad , \quad (66)$$

l' eq. (65) diviene

$$v_x = \frac{H^2}{8\mu} \left(-\frac{d\mathcal{P}}{dx} \right) \left[1 - \left(\frac{2y}{H} \right)^2 \right] \quad . \quad (67)$$

La portata volumetrica, Q , può essere calcolata come

$$Q = W \int_{-H/2}^{H/2} v_x dy = \frac{WH^3}{12\mu} \left(-\frac{d\mathcal{P}}{dx} \right) \quad , \quad (68)$$

dove W è l'ampiezza dei piani.

2.3 Moto di Poiseuille in Tubazione

Questo problema riguarda il moto in un tubo di un fluido Newtoniano incomprimibile, come schematicamente illustrato in figura 4. Per la soluzione del problema è conveniente adottare un sistema di coordinate cilindriche con la trasformazione

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1}(y/x) \quad , \quad z = z \quad . \quad (69)$$

In questo sistema di coordinate risulta, per considerazioni simili a quelle fatte nei precedenti esempi,

$$v_z = v_z(r) \quad , \quad v_r = v_\theta = 0 \quad . \quad (70)$$

Queste posizioni soddisfano l'equazione di continuità. Le equazioni di N-S per questo caso sono

$$-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} = 0 \quad , \quad (71)$$

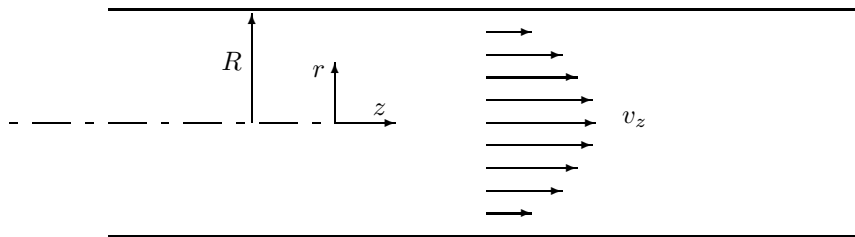


Figura 4: Flusso di Poiseuille in Tubazione.

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad (72)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0 \quad . \quad (73)$$

Anche in questo caso, le equazioni (71) e (72) portano a concludere che \mathcal{P} è funzione solo di z . L'eq. (73) impone inoltre che $\partial \mathcal{P} / \partial z$ sia costante. Con questa posizione, l'eq. (73) ha per soluzione

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \frac{d\mathcal{P}}{dz} r^2 + c_1 \ln r + c_2 \quad . \quad (74)$$

Le condizioni al contorno dell'eq. (73) sono

$$r = R \longrightarrow v_z = 0 \quad , \quad (75)$$

$$r = 0 \longrightarrow \frac{dv_z}{dr} = 0 \quad . \quad (76)$$

La seconda condizione permette di porre $c_1 = 0$. La prima permette di ricavare per v_z l'espressione seguente

$$v_z(r) = \frac{R^2}{4\mu} \left(-\frac{d\mathcal{P}}{dz} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad . \quad (77)$$

Anche la velocità media può essere calcolata agevolmente. Si ottiene

$$\langle v_z \rangle = \frac{R^2}{8\mu} \left(-\frac{d\mathcal{P}}{dz} \right) \quad . \quad (78)$$

2.4 Equazione dell'Energia meccanica nel Moto di Poiseuille Laminare

Ci si propone ora di ricavare l'equazione di trasporto dell'energia meccanica. Con riferimento alla figura 3 e considerando le seguenti ipotesi:

- $v_y = v_z = 0$ moto unidirezionale secondo x

- $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ moto bidimensionale
- $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ moto stazionario

le equazioni di continuità e di N-S si semplificano come segue:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad , \quad (79)$$

$$0 = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad . \quad (80)$$

Per ottenere l'equazione dell'energia è sufficiente moltiplicare scalarmente l' equazione (80) per v_x :

$$0 = -v_x \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \mu v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad . \quad (81)$$

Sviluppando poi la derivata

$$\frac{\partial \tau v_x}{\partial y}$$

mediante le note regole di derivazione di un prodotto e ricordando che

$$\tau = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

è possibile riscrivere l'ultimo termine dell'equazione (81) ottenendo la relazione definitiva:

$$0 = -\frac{\partial (\mathcal{P}v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\tau v_x)}{\partial y} - \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \quad . \quad (82)$$

Il significato fisico dei termini di questa equazione è il seguente:

1. il primo termine rappresenta il lavoro delle forze di (pressione). Poichè il flusso avviene per la presenza di un gradiente di pressione esso è l'unico termine di "guadagno" nell'economia del flusso in esame che, integrato sull'intera sezione, fornisce un contributo di segno positivo.
2. il secondo termine è il lavoro delle forze viscosi, il cui integrale è invece nullo. Questo significa che il termine delle forze viscosi funge in realtà da "ridistributore" di energia.
3. il terzo è quello di dissipazione viscosa la cui integrazione porta ad un contributo di segno negativo.

Nel caso di moto piano di Poiseuille, per il quale è nota l'espressione del profilo di velocità, è possibile esplicitare l'equazione differenziale di trasporto di energia. Essendo infatti la velocità media:

$$v_x = \frac{3}{2} U_{ave} \left[1 - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right] \quad (83)$$

dove $U_{ave} = Q/A$ e $a = H/2$ si ricavano i termini:

$$\tau = -\frac{3\mu U_{ave} y}{a^2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = -\frac{3\mu U_{ave}}{a^2}$$

che sostituiti nell' eq. (82) danno la relazione finale:

$$0 = \frac{9\mu U_{ave}^2}{2a^2} \left[\underbrace{\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}_1 + \underbrace{\left(\frac{3y^2}{a^2} - 1\right)}_2 - \underbrace{\left(\frac{2y^2}{a^2}\right)}_3 \right] . \quad (84)$$

La figura 5 mostra l'andamento lungo la sezione di ogni termine dell' eq. (84).

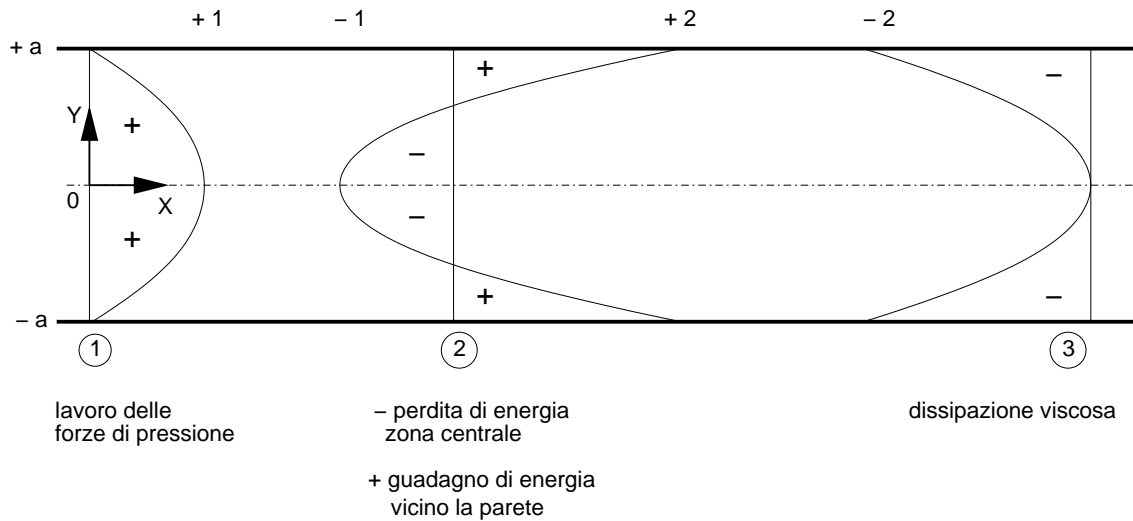


Figura 5: Andamento dei contributi di energia nel moto laminare

3 Capitolo 3

3.1 Introduzione al Moto Turbolento

Un fluido in moto turbolento è caratterizzato da fluttuazioni temporali e spaziali delle componenti di velocità pur conservando, nel caso di moto stazionario in senso lato, valori medi costanti nel tempo. La turbolenza può essere spesso descritta come il risultato di fenomeni di instabilità che avvengono durante il moto di un fluido. Si consideri il moto di un fluido in una tubazione. Il numero di Reynolds basato su diametro e velocità media è il parametro che consente di stabilire se il fluido sia in moto laminare o turbolento. Al di sotto del valore $Re = 2100$, il moto laminare è stabile, per valori maggiori il moto laminare è instabile. Un fluido in moto laminare al di sotto del valore critico del numero di Reynolds, anche se subisce una perturbazione (per esempio vibrazioni della tubazione), ritorna, esaurito il transitorio, a muoversi in moto laminare. Invece, un fluido in moto laminare con $Re > 2100$, in seguito a una perturbazione si muoverà in moto turbolento.

Nel caso di regime turbolento, il campo di moto è tridimensionale e dipendente dal tempo, e, in generale, non possono essere fatte semplificazioni. Poiché non è possibile risolvere le equazioni di N-S in forma chiusa, data la forte non linearità che caratterizza il termine convettivo, l'unica via rimane la soluzione diretta delle equazioni per via numerica. Tuttavia, tale strada è percorribile solo per valori limitati del numero di Reynolds e per geometrie semplici. Infatti, le esigenze computazionali sono proporzionali al numero di Reynolds alla terza potenza e diventano rapidamente troppo onerose per qualunque calcolatore esistente. L'alternativa comunemente utilizzata per la soluzione del problema consiste nel mettere a punto metodi semplificati per la descrizione di campi di moto turbolenti. Alcuni di questi metodi sono descritti in questo capitolo.

3.2 Equazioni per il Moto Turbolento: Componenti Medie e Fluttuanti della Velocità

Per applicare la procedura di Reynolds è utile introdurre alcune definizioni. Il valore medio di un parametro ξ del quale siano disponibili N valori è definito come

$$\bar{\xi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \quad , \quad (85)$$

ovvero

$$\bar{\xi}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} \xi(\tau) d\tau \quad , \quad (86)$$

laddove si è assunto che anche il valore medio di ξ possa essere funzione del tempo. Questo significa che il valore di T deve essere scelto sufficientemente grande per eliminare l'effetto sul valor medio delle fluttuazioni turbolente, ma più piccolo dei tempi che caratterizzano l'evoluzione macroscopica del campo di moto nel tempo. Ovviamente, le variazioni temporali del valor medio devono essere lente rispetto alle fluttuazioni dovute alla turbolenza del campo di moto. Se il valore $\bar{\xi}$ non varia nel tempo, il processo si definisce stazionario.

Nel caso particolare di un campo di moto di un fluido se, ad esempio, si considera la componente v_x del vettore velocità, il suo valore medio nel tempo sarà:

$$\overline{v_x}(x, y, z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T v_x(x, y, z, t) dt \quad . \quad (87)$$

Introdotti questi concetti, è possibile utilizzare la seguente decomposizione del campo di moto, ad esempio, secondo la componente x ,

$$v_x(x, y, z, t) = v'_x(x, y, z, t) + \overline{v_x}(x, y, z) \quad , \quad (88)$$

dove $v'_x(x, y, z, t)$ è definita fluttuazione del campo di moto (fig. 6).

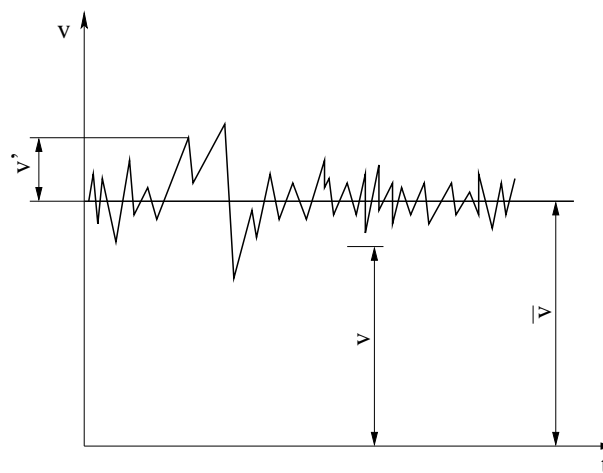


Figura 6: Velocità media, velocità istantanea e fluttuazione secondo il metodo di Reynolds

Dalla definizione segue inoltre che la media nel tempo di v'_x è nulla. Come vedremo in seguito, la sostituzione di tale decomposizione nelle equazioni di N-S comporta il sorgere di termini del tipo:

$$\overline{v_y \frac{\partial v'_x}{\partial y}} \quad . \quad (89)$$

Conviene osservare subito che, poiché l'operazione di differenziazione e quella di integrazione possono essere scambiate nell'ordine, il valore medio di questi termini è nullo. Infatti:

$$\begin{aligned} \overline{v_y \frac{\partial v'_x}{\partial y}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \overline{v_y \frac{\partial v'_x}{\partial y}} dt \\ &= \overline{v_y} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{\partial v'_x}{\partial y} dt = \overline{v_y} \frac{\partial}{\partial y} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T v'_x dt = 0 \quad . \end{aligned} \quad (90)$$

3.3 Equazione della Continuità nel Moto Turbolento

Si consideri l'equazione di continuità per un fluido incompressibile

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad . \quad (91)$$

Sostituendo alle componenti di velocità la decomposizione presentata nell' eq. (88), si ottiene

$$\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} + \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_y}}{\partial y} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial z} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} = 0 \quad . \quad (92)$$

Tenendo presente la definizione di velocità media e notando che è possibile invertire l'ordine delle operazioni di integrazione e derivazione, la media temporale del termine medio si riduce alla seguente espressione:

$$\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} dt = \frac{1}{2T} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-T}^T \overline{v_x} dt = \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x}$$

mentre la media temporale del termine fluttuante si annulla per definizione stessa di fluttuazione cioè

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{\partial v'_x}{\partial x} dt = \frac{1}{2T} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-T}^T v'_x dt = 0$$

. Poichè analoghe espressioni si ottengono anche per le componenti in x e y si conclude che:

$$\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial z} = 0 \quad ; \quad (93)$$

sottraendo questa equazione dalla precedente si ricava anche

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} = 0 \quad . \quad (94)$$

In sostanza si giunge alla conclusione che l'equazione di continuità vale sia per le componenti medie che fluttuanti della velocità.

3.4 Equazione di Navier-Stokes nel Moto Turbolento (R.A.N.S.)

La via più naturale per descrivere la dinamica di un moto turbolento è quella di partire dalle equazioni di Navier-Stokes nella loro forma classica del moto laminare e adattarle al caso turbolento secondo il metodo della decomposizione di Reynolds. Di seguito si considera l'equazione di Navier-Stokes per la sola componente x

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad .$$

Operando la sostituzione

$$v_x = \overline{v_x} + v'_x$$

e sviluppando le derivate, come già fatto per l'equazione di continuità si ottiene:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial t} + \frac{\partial v'_x}{\partial t} + \overline{v_x} \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} + \overline{v_x} \frac{\partial v'_x}{\partial x} + v'_x \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} + v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x} \right) + \\ & + \rho \left(\overline{v_y} \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} + \overline{v_y} \frac{\partial v'_x}{\partial y} + v'_y \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y} \right) + \\ & + \rho \left(\overline{v_z} \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial z} + \overline{v_z} \frac{\partial v'_x}{\partial z} + v'_z \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial z} + v'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \overline{v_x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{v_x}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{v_x}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z^2} \right) .$$

A questo punto, secondo la procedura di Reynolds, si dovrebbero eseguire le medie temporali per ogni singolo termine. Tuttavia si può notare come questa operazione, insieme alla definizione stessa di termine fluttuante, porti ad una notevole semplificazione dell'equazione finale dato che le medie temporali dei termini

$$\overline{v_j \frac{\partial v'_i}{\partial j}} , \quad v'_j \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial j} , \quad \frac{\partial^2 v'_i}{\partial i^2} , \quad \frac{\partial p'}{\partial i} , \quad \frac{\partial v'_i}{\partial t}$$

sono identicamente nulle. Anche il termine $\partial \overline{v_x} / \partial t$ è nullo nell'ipotesi di stazionarietà del campo di moto. E' possibile ora riordinare l'equazione di Navier-Stokes ponendola nella seguente forma:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\overline{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}} + \overline{v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}} + \overline{v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}} \right) \\ &= -\frac{\partial \overline{\mathcal{P}}}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 \overline{v_x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{v_x}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{v_x}}{\partial z^2} \right] - \rho \left[\overline{v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x}} + \overline{v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y}} + \overline{v'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z}} \right] . \end{aligned} \quad (95)$$

nella quale si può riconoscere, salvo per i termini mediati con il metodo di Reynolds, l'equazione classica di Navier-Stokes ma con una sostanziale differenza. Al secondo membro, infatti, nella seconda parentesi quadra compaiono i termini detti *stress di Reynolds*. Una prima importante osservazione può essere così posta: mentre i termini di dissipazione viscosa (prima parentesi quadra al secondo membro) sono una proprietà del fluido ed erano già presenti nell'equazione classica di Navier - Stokes, gli stress di Reynolds sono una proprietà del flusso che deriva dall'aver introdotto un modello di flusso turbolento. E' possibile ora elaborare ulteriormente l'espressione degli stress di Reynolds al fine di ottenere una forma succinta al secondo membro dell'equazione.

Il generico termine di stress $\overline{v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x}}$ può essere così espresso sfruttando la derivazione di prodotto di funzioni:

$$\overline{v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x} \overline{(v'_x v'_x)} - v'_x \left(\frac{\partial v'_x}{\partial x} \right) . \quad (96)$$

L'intero termine di stress diventa pertanto:

$$\rho \left[\frac{\partial \overline{v'_x v'_x}}{\partial x} - \overline{v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x}} + \frac{\partial \overline{v'_x v'_y}}{\partial y} - \overline{v'_x \frac{\partial v'_y}{\partial y}} + \frac{\partial \overline{v'_x v'_z}}{\partial z} - \overline{v'_x \frac{\partial v'_z}{\partial z}} \right] ,$$

dove i generici termini $\overline{v'_x \frac{\partial v'_j}{\partial j}}$ possono essere raccolti a fattor comune ed eliminati in virtù della legge di continuità per i termini fluttuanti. L'espressione degli stress di Reynolds si riduce pertanto alla seguente equazione:

$$\rho \left[\overline{v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x}} + \overline{v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y}} + \overline{v'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z}} \right]$$

e ricondando infine che $\mu = \rho \nu$ l'equazione di Navier-Stokes per il moto turbolento diventa:

$$\rho \left[\overline{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}} + \overline{v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}} + \overline{v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}} \right]$$

$$= -\frac{\overline{\partial \mathcal{P}}}{\partial x} + \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} - \overline{v'_x v'_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} - \overline{v'_y v'_x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial z} - \overline{v'_z v'_x} \right) \right] . \quad (97)$$

E' questa la forma meglio conosciuta come *R.A.N.S.*, *Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations*, che può essere generalizzata. Indicando infatti con $i = 1, 2, 3$ la generica coordinata e utilizzando la convenzione che l'operazione di sommatoria sia indicata dalla presenza di un indice ripetuto,

$$a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \equiv \sum_j a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} , \quad (98)$$

le equazioni di Reynolds per flusso stazionario per la generica componente i possono essere scritte in forma compatta come:

$$\rho \overline{v_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} = -\frac{\overline{\partial \mathcal{P}}}{\partial x_i} + \nu \left[\frac{\partial^2 \overline{v_i}}{\partial x_j^2} \right] - \rho \left[\frac{\partial (\overline{v'_i v'_j})}{\partial x_j} \right] . \quad (99)$$

In queste equazioni, i termini del tipo $\partial(\overline{v'_i v'_j})/\partial x_j$ rappresentano le tensioni di Reynolds.

3.5 Gli Stress di Reynolds

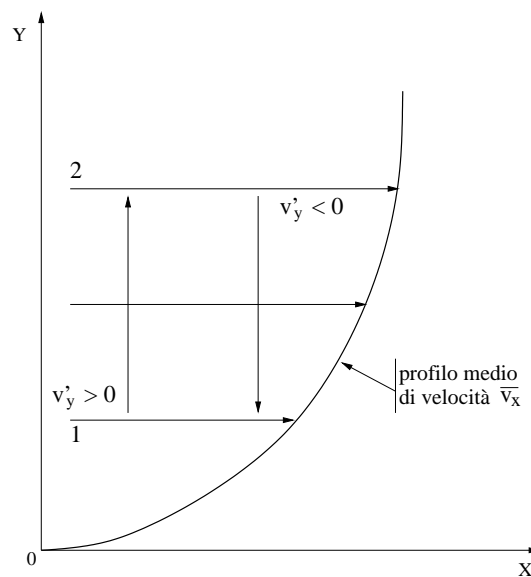


Figura 7: Significato fisico delle tensioni (stress) di Reynolds.

Per capire il significato fisico delle tensioni (stress) di Reynolds, in figura 7 è rappresentato un profilo di velocità mediato nel tempo e due superfici parallele al piano $x - z$. Si consideri un elemento di fluido che, grazie ad una fluttuazione positiva, $v'_y > 0$ si sposti dalla superficie 1 alla 2. Poiché in media la velocità degli elementi fluidi della superficie 1 è inferiore a quella degli elementi della 2, l'elemento di fluido avrà velocità lungo x inferiore a quella media, cioè $v'_x < 0$. In media si avrà:

$$\overline{\rho v'_x v'_y} < 0 . \quad (100)$$

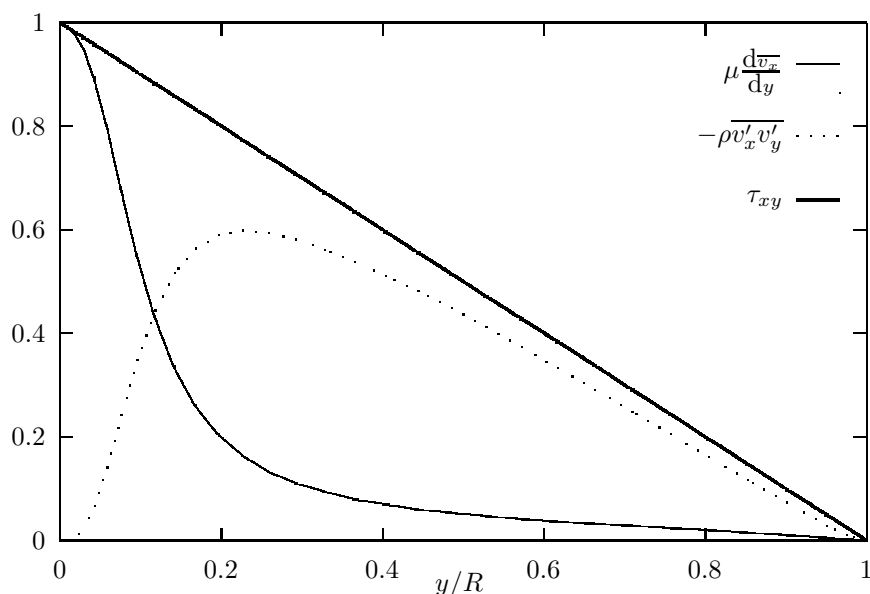


Figura 8: Andamento delle tensioni di Reynolds, delle tensioni viscosi e delle tensioni totali per flusso turbolento in una tubazione di raggio R .

Portare il nuovo elemento alla velocità media del piano 2 comporta un'abbassamento della velocità media nel piano 2. Si consideri ora un elemento inizialmente nel piano 2 che, a causa di una fluttuazione negativa, $v'_y < 0$, si sposti dal piano 2 al piano 1. È possibile ripetere lo stesso ragionamento e ottenere ancora $\overline{\rho v'_x v'_y} < 0$. L'espressione per il taglio totale può essere introdotta nelle equazioni di Navier-Stokes mediate secondo Reynolds nel modo seguente:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{d\overline{v_x}}{dy} - \left(\overline{\rho v'_x v'_y} \right) \quad (101)$$

In figura 8 è riportato l'andamento dei singoli termini dell'equazione (101) adimensionalizzati rispetto al taglio alla parete, per flusso turbolento in una tubazione di raggio R , in funzione della distanza adimensionale dalla parete, y/R .

3.6 Viscosità Turbolenta secondo il Modello di Prandtl

Per risolvere le equazioni di Navier-Stokes mediate nel tempo secondo la procedura di Reynolds occorre un modello per le tensioni di Reynolds. Il modello più semplice assume per le tensioni dovute alla turbolenza una forma analoga al tensore degli sforzi per fluido Newtoniano in moto laminare (Boussinesq, 1877), per esempio

$$\tau_{xy}^t = \mu^t \left(\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v_y}}{\partial x} \right) \quad (102)$$

dove μ^t non è una proprietà fisica del fluido ma è un parametro che deve essere valutato opportunamente. Come prima considerazione va detto che μ^t non può essere costante nel campo di moto, ma dipende dalla posizione. Questo appare evidente considerando che il profilo di velocità non ha

derivata nulla alla parete, mentre alla parete devono essere nulle le tensioni di Reynolds (la velocità alla parete è nulla).

Per analogia con il concetto di cammino libero medio molecolare nella teoria cinetica dei gas, Prandtl (1933) propose il seguente modello per la viscosità turbolenta:

$$\mu^t = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| . \quad (103)$$

In questa equazione, l è definita come lunghezza di miscelamento ed è l'analogo del cammino libero medio molecolare nella teoria cinetica dei gas. In questa teoria, il cammino libero medio è definito come il cammino che in media una molecola può fare senza urtare altre molecole. In un flusso turbolento, la lunghezza di miscelamento corrisponde alla distanza oltre la quale una massa di fluido che si muove in modo coerente, perde la sua identità.

4 Capitolo 4

4.1 Moto Turbolento in un Tubo

Le equazioni di conservazione della quantità di moto scritte in coordinate cilindriche e mediate nel tempo danno luogo all'equazione

$$\frac{d\bar{\mathcal{P}}}{dz} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r(\bar{\tau}_{rz} + \tau_{rz}^t) \quad . \quad (104)$$

Un bilancio di forza globale su un tratto di tubo Δz , dove z è l'asse del tubo e quindi la direzione del flusso, dà

$$\pi R^2 \left(-\frac{d\bar{\mathcal{P}}}{dz} \right) \Delta z = 2\pi R \tau_w \Delta z \quad , \quad (105)$$

dove τ_w è lo sforzo medio alla parete. Si ha così

$$\bar{\tau}_{rz} + \tau_{rz}^t = -\frac{r}{R} \tau_w \quad . \quad (106)$$

Le due tensioni a sinistra possono essere espresse come

$$\bar{\tau}_{rz} = \mu \frac{d\bar{v}_z}{dr} \quad , \quad (107)$$

$$\tau_{rz}^t = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{v}_z}{dr} \right| \frac{d\bar{v}_z}{dr} \quad , \quad (108)$$

dove si è utilizzata l'equazione della viscosità turbolenta secondo il modello di Prandtl. Sostituendo le equazioni (107) e (108) nell' eq. (106) e ponendo $y = R - r$, l'equazione (106) diviene

$$\rho l^2 \left(\frac{d\bar{v}_z}{dy} \right)^2 + \mu \frac{d\bar{v}_z}{dy} - \left(1 - \frac{y}{R} \right) \tau_w = 0 \quad . \quad (109)$$

Se si introducono parametri caratteristici quali la *velocità di attrito*

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad , \quad (110)$$

e la dimensione $\mu/\rho v^*$, l' eq. (109) può essere resa adimensionale ed assumere la forma

$$l_+^2 \left(\frac{dv_+}{dy_+} \right)^2 + \frac{dv_+}{dy_+} - \left(1 - \frac{y_+}{R_+} \right) = 0 \quad , \quad (111)$$

dove $l_+ = l(\rho v^*)/\mu$ e si è posto $v_+ = v_z/v^*$. Dall' eq. (111) si può ricavare per dv_+/dy_+

$$\frac{dv_+}{dy_+} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4l_+^2(1 - y_+/R_+)}}{2l_+^2} \quad . \quad (112)$$

Questa equazione ha come condizione al contorno: $y_+ = 0, v_+ = 0$ e può essere integrata una volta che sia assegnata la funzione $l_+ = l_+(y_+)$. Nel suo modello, Prandtl propose di assumere

$$l_+ = ky_+ \quad , \quad (113)$$

Questa espressione però non è corretta in prossimità della parete, dove l_+ tende rapidamente a zero. È conveniente assumere per l_+ l'espressione proposta da Van Driest

$$l_+ = ky_+(1 - \exp[-y_+/A]) \quad , \quad (114)$$

dove $A = 36$. Utilizzando l'eq. (113) o la (114) per l_+ , l'equazione (112) può essere integrata analiticamente almeno in alcune posizioni del campo di moto. In prossimità della parete $y_+/R_+ \rightarrow 0$ e la funzione che si ottiene $v_+ = v_+(y_+)$ è indipendente da R_+ ed è valida in prossimità di una parete per qualsiasi geometria. Si può dimostrare sperimentalmente che questo risultato è corretto ed il profilo di velocità che si ottiene è chiamato *universale*.

L'integrale dell'equazione (112) per $y_+/R_+ \rightarrow 0$, nella forma

$$v_+ = \int_0^{y_+} \frac{-1 + \sqrt{1 + 4l_+^2}}{2l_+^2} dy_+ = 2 \int_0^{y_+} \frac{dy_+}{1 + \sqrt{1 + 4l_+^2}} \quad , \quad (115)$$

può essere calcolato agevolmente nei casi limite:

Sottostrato Viscoso $l_+ \rightarrow 0$: In prossimità della parete l_+ , tende rapidamente a zero e l'equazione (115) dà

$$v_+ = y_+ \quad . \quad (116)$$

In questo caso i termini viscosi dominano. L'equazione (116) è valida per $y_+ < 5$.

Sottostrato Inerziale $4l_+^2 \gg 1$: In questo caso l'integrale dell' eq. (115) può essere messo nella forma

$$v_+ - v_+^v = \int_{y_+^v}^{y_+} \frac{dy_+}{l_+} \quad , \quad (117)$$

dove la coordinata y_+^v rappresenta la distanza dalla parete alla quale gli effetti viscosi diventano trascurabili. Per $l_+ = ky_+$, dalla eq. (117) si ricava:

$$v_+ = \frac{1}{k} \ln y_+ + b \quad , \quad (118)$$

dove

$$b = v_+^v - \frac{1}{k} \ln y_+^v \quad . \quad (119)$$

Questa dipendenza logaritmica è stata determinata anche sulla base di semplici considerazioni dimensionali. Si è assunto che in prossimità di una parete la velocità v_z sia funzione di soli tre parametri v^* , y e ν :

$$v_z = f(v^*, y, \nu) \quad . \quad (120)$$

Questo porta ad una relazione adimensionale del tipo

$$v_+ = f(y_+) \quad . \quad (121)$$

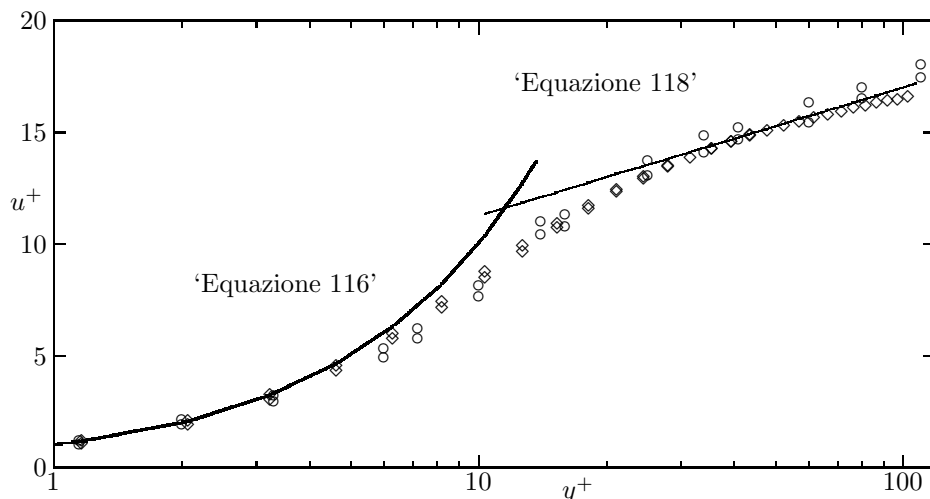


Figura 9: Experimental velocity profiles (\circ) calculated by Direct Numerical Simulation (DNS) (\diamond) compared with equations 116 and 118.

La viscosità è importante solo in prossimità della parete, invece, ad una certa distanza della parete, se il valore assoluto della velocità ancora dipende da ν , la derivata $\partial v_z / \partial y$ deve essere indipendente dalla viscosità ovvero:

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} \sim \frac{v^*}{y} \quad (122)$$

L'integrale dell' eq. (122) ha appunto la forma dell' eq. (118). In figura 9 è rappresentato il profilo (medio nel tempo) di velocità che si ha in un fluido in moto turbolento su una parete (tubazione, canale, etc.) con le linee delle equazioni (116) e (118). I dati sono stati ottenuti sia per via sperimentale che per risoluzione diretta delle equazioni di N-S. Dalle misure sperimentali si trova $k = 0.4$ e $b = 5.5$. Il valore della costante b corrisponde ad una distanza dalla parete $y_+ = 11.6$, se si assume che il profilo di velocità relativo al sottostrato viscoso, $v_+ = y_+$, possa essere esteso fino a questa quota. Con questi valori per k e b , l' eq. (118) diventa

$$v_+ = 2.5 \ln y_+ + 5.5 \quad (123)$$

Lontano dalla parete, nella zona centrale del tubo, l'integrale dell'equazione (112) dipende da R_+ e può essere posto nella forma

$$v_+ = v_{+,max} + \int_{y_+}^{R_+} \frac{1 - \sqrt{1 + 4l_+^2(1 - y_+/R_+)}}{2l_+^2} dy_+ \quad (124)$$

dove $v_{+,max}$ è la velocità massima che si ha a $y_+ = R_+$. L'equazione (124) può essere immediatamente semplificata per $y^+ \gg 1$ assumendo $l_+ = ky_+$

$$v_+ = v_{+,max} - \int_{y_+}^{R_+} \frac{(1 - y_+/R_+)^{1/2}}{ky_+} dy_+ \quad (125)$$

La conoscenza del profilo di velocità permette di calcolare il fattore di attrito per moto turbolento.

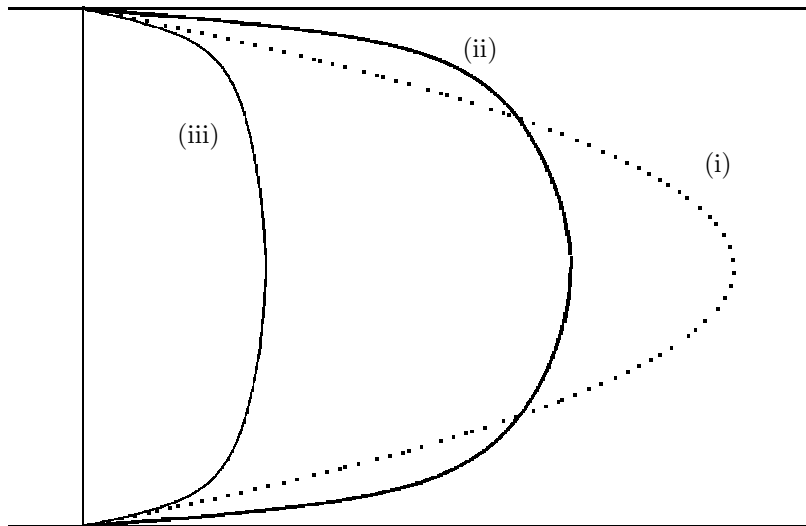


Figura 10: Confronto tra profili di velocità per flusso laminare (i) e turbolento (ii) in tubazione. A parità di velocità media si trovano i profili laminare (i) e turbolento (ii) (sono stati calcolati per numero di Reynolds pari a 10000). A parità di gradiente di pressione si trovano invece i profili laminare (i) e turbolento (iii).

Si ha infatti

$$v^* = \sqrt{\frac{f}{2}} \langle v_z \rangle = \sqrt{\frac{f}{2}} \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r v_z dr \quad , \quad (126)$$

da cui

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = \frac{2}{R^2} \int_0^R r v_+ dr = \frac{2}{R^2} \int_0^R (R-y) v_+ dy \quad . \quad (127)$$

Per risolvere l'integrale si devono sostituire ad v_+ i profili di velocità determinati per le varie zone della sezione del tubo. In realtà il profilo universale logaritmico, equazione (118), rappresenta un'approssimazione sufficiente per l'intera sezione. Si ha così

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{f}} &= \frac{2}{R^2} \int_0^R (R-y)(2.5 \ln y_+ + 5.5) dy \\ &= 2 \int_0^1 (1-\xi) \left(2.5 \ln \xi + 5.5 + 2.5 \ln Re \sqrt{\frac{f}{8}} \right) d\xi \quad , \end{aligned} \quad (128)$$

dove $\xi = y/R$ e, per definizione $R_+ = Re \sqrt{f/8}$. L' eq. (128) permette di ricavare per il fattore d'attrito la seguente espressione

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.8 \ln(Re \sqrt{f}) - 0.6 \quad , \quad (129)$$

I profili turbolenti di velocità sono spesso rappresentati nella forma

$$\frac{v_z}{v_{z,max}} = \left(\frac{y}{R} \right)^m \quad , \quad (130)$$

ovvero, in termini della velocità media $\langle v_z \rangle$

$$\frac{v_z}{\langle v_z \rangle} = \frac{(m+1)(m+2)}{2} \left(\frac{y}{R}\right)^m . \quad (131)$$

In queste equazioni m è compreso nel campo $[1/10 - 1/6]$. Utilizzando questa espressione è anche possibile calcolare come per il caso precedente il coefficiente di attrito. Per $m = 1/7$ si trova l'equazione di Blasius già introdotta.

È interessante a questo punto confrontare i profili di velocità che si ottengono per flusso laminare e turbolento. In figura 10 si può osservare come il profilo di velocità turbolenta sia più piatto rispetto a quello laminare e come in moto turbolento la dissipazione sia maggiore.

4.2 Equazione del Trasporto di Energia: Caso Turbolento

Per giungere ad una equazione che esprima l'energia in regime turbolento di un flusso è si procede nello stesso modo adottato per il caso laminare. Tuttavia si dovranno considerare, come punto di partenza, le equazioni di N-S adattate al caso in esame ossia le R.A.N.S. Vista l'unidirezionalità del flusso, riportiamo l'espressione generale per la sola componente lungo x:

$$\rho \left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \overline{v_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial \overline{\mathcal{P}}}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial \overline{v_{xi}}}{\partial x_j} - \overline{v'_{xi} v'_{xj}} \right] . \quad (132)$$

Considerate le ipotesi semplificative del caso in esame:

- $\overline{v_y} = \overline{v_z} = 0$ moto unidirezionale secondo x
- $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ moto stazionario

Le equazioni di continuità e di N-S secondo la decomposizione di Reynolds si riducono rispettivamente alle seguenti:

$$\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} = 0 , \quad (133)$$

$$0 = - \frac{\partial \overline{\mathcal{P}}}{\partial x} + \rho \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} - \overline{v'_x v'_y} \right] . \quad (134)$$

Si ricorda che il termine fra parentesi quadra dell' eq. (134) rappresenta proprio lo stress di Reynolds medio ossia:

$$\overline{\tau_{xy}} = \rho \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} - \overline{v'_x v'_y} \right] . \quad (135)$$

Adottando la stessa procedura vista per il caso laminare, cio moltiplicando scalarmente l' equazione (134) per $\overline{v_x}$ e sfruttando le regole di derivazione del prodotto di funzioni, si giunge all'espressione finale che esprime il trasporto di energia per il caso turbolento:

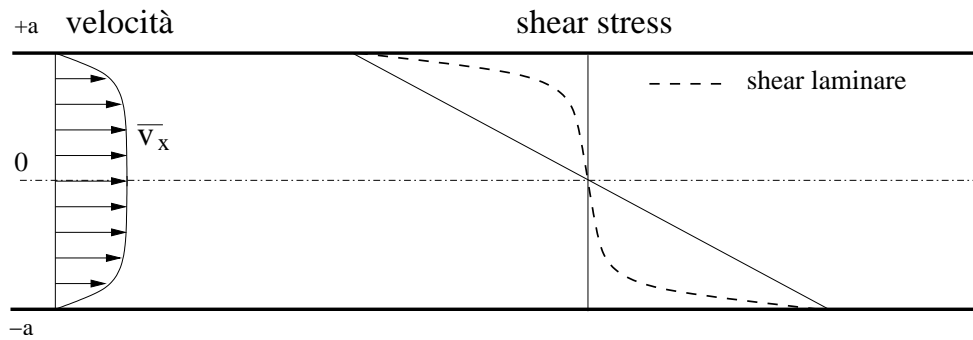


Figura 11: Profilo di velocità nel moto turbolento: da notare l'appiattimento nella zona centrale rispetto il caso laminare

$$\underbrace{\frac{\partial (\overline{\mathcal{P}v_x})}{\partial x}}_1 = \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\left[\overline{v_x} \left(\mu \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} - \rho \overline{v'_x v'_y} \right) \right]}_2 + \underbrace{\left[-\mu \left(\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} \right)^2 \right]}_a + \underbrace{\left[\rho \overline{v'_x v'_y} \left(\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} \right) \right]}_b . \quad (136)$$

Dall'equazione del momento della quantità di moto risulterebbe $\partial \overline{p} / \partial x = \partial \tau / \partial y$; questo implica che lo sforzo di taglio (shear stress) sia una funzione lineare di y . Se chiamiamo la componente laminare di stress $\tau_{lam} = \mu \partial \overline{v_x} / \partial y$ possiamo vedere quanta porzione dello sforzo di taglio è dovuto alla fluttuazione turbolenta. Il profilo di velocità e quello dello sforzo di taglio sono illustrate in fig. 11. Il significato fisico dell'equazione (136), di cui si riporta la rappresentazione grafica nella figura 12 è il seguente:

1. Lavoro di pressione. Come già visto nel caso laminare questo è l'unico termine energetico di "guadagno" poichè il gradiente di pressione stesso promuove il flusso.
2. Lavoro di shear, dovuto agli sforzi di taglio. Questo è un termine "ridistributivo" dell'energia dacchè il suo integrale sull'intera sezione è nullo.
3. Termine dissipativo nel quale si distinguono:
 - (3a) Dissipazione conseguente alla deformazione principale
 - (3b) Perdita di energia dovuta alla produzione di fluttuazioni di velocità turbolenta.

Le figure mettono in evidenza il contributo del termine di dissipazione 3b (linea tratteggiata) e come il contributo di dissipazione laminare sia l'unico presente alla parete poichè, qui, sono nulle le fluttuazioni turbolente.

4.3 Energia Cinetica Turbolenta

L'equazione dell'energia cinetica turbolenta può essere ricavata annullando la derivata sostanziale del solo termine fluttuante:

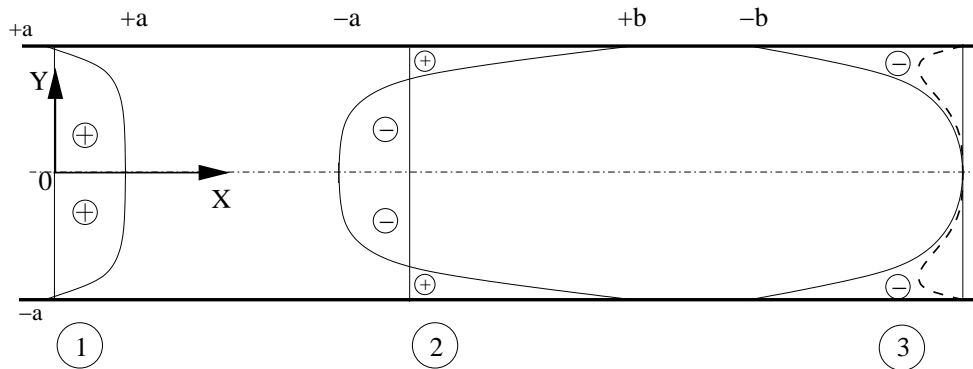


Figura 12: Andamento dei contributi di energia nel moto turbolento

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho v'_i v'_i} \right) = 0 = \underbrace{-\overline{\rho v'_x v'_y} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}}_1 - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho v'_i v'_i v'_y} + \overline{p' v'_y} \right)}_2 + \underbrace{\mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\overline{v'_i v'_i}}{2} + \overline{v'^2_y} \right)}_3 - \underbrace{\mu \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right)}_4 \quad (137)$$

Il primo membro indica la variazione di energia cinetica per unità di massa e di tempo. Il termine di produzione turbolenta è indicato con (1), mentre il termine (2), in cui compare la tripla correlazione $\overline{v'_i v'_i v'_y}$, è quello di diffusione. il termine (3) viene trascurato poichè di piccola entità rispetto a (2) mentre (4) rappresenta la dissipazione di energia cinetica turbolenta per unità di volume.

4.4 Modelli a Viscosità Turbolenta

Si è visto che la trattazione del moto turbolento non può prescindere dalla definizione della viscosità turbolenta che, come precisato nei capitoli precedenti, non è una proprietà del fluido ma del flusso. Diversi studiosi si sono perciò preoccupati di fornire un modello matematico che possa descrivere questa grandezza. I modelli a viscosità turbolenta si basano in genere su ipotesi di diffusione per gradiente della quantità di moto poichè è proprio questo il significato fisico: la struttura turbolenta (vortice) acquista quantità di moto da quelli circostanti ma, allo stesso tempo, ne cede ad altri. Ovviamente, rispetto a questo fenomeno, si può immaginare che le strutture turbolente non si comportano allo stesso modo: vortici grandi e lontani dalla parete hanno generalmente maggior capacità di trasmettere quantità di moto rispetto a quelli “schiacciati” a ridosso della parete. il problema della definizione di un modello di viscosità turbolenta è quindi quello di cercare una lunghezza scala e un tempo scala, dipendenti dalla posizione del vortice stesso, entro i quali la struttura turbolenta rimane coerente. E' questo il significato della lunghezza l di miscelamento di Prandtl di cui si è dato cenno nei capitoli precedenti: una lunghezza rappresentativa della scala locale dei vortici turbolenti.

$$\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right| . \quad (138)$$

Prandtl assunse l proporzionale alla distanza dalla parete, Von Karman la calcolò come

$$\left| (\partial \bar{v} / \partial y) / (\partial^2 \bar{v} / \partial y^2) \right| .$$

Van Driest moltiplicò l'equazione (138) per un fattore di smorzamento al fine di tener conto della riduzione delle scale di turbolenza nella regione di parete

Tutti questi sono comunque modelli algebrici, che forniscono direttamente la viscosità turbolenta in funzione delle variabili medie, senza ricorrere a equazioni differenziali. Poichè sovente contengono parametri empirici costituiscono modelli ad hoc per specifici problemi. Di maggiore generalità sono i modelli differenziali, in cui una o più grandezze caratteristiche della turbolenza (l'energia cinetica turbolenta o il tasso di dissipazione) sono ottenute risolvendo opportune equazioni di trasporto. Ciò consente di impostare bilanci di queste quantità in cui figurano esplicitamente i termini di generazione, distribuzione, dissipazione. Lo scopo di un simile modo di operare è quello di ottenere equazioni di maggiore generalità, aventi minor dipendenza da assunzioni empiriche, a prezzo di una maggiore complessità e onere computazionale.

4.5 Il Modello $k - \varepsilon$

Come indica lo stesso nome questo modello si basa su due equazioni differenziali: una per l'energia cinetica turbolenta k , l'altra per la dissipazione ε . E' possibile ottenere la prima equazione di trasporto menzionata semplicemente riscrivendo quella del paragrafo 4.3 e porla nella seguente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_i k) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + P - \rho \varepsilon , \quad (139)$$

in cui σ_k è una costante dell'ordine dell'unità detta numero di Prandtl turbolento mentre P e ε sono rispettivamente il termine di produzione $-\overline{v'_i v'_j} \partial \bar{v}_i / \partial x_j$ e di dissipazione $\overline{\nu \partial v_i \partial v_j} / \partial x_j \partial x_i$ già evidenziati, anche se con scrittura leggermente diversa, nel paragrafo 4.3.

Per quanto riguarda la dissipazione ε essa è formalmente definita dall'equazione (139) ma è necessario associarvi una forma di chiusura, magari ricorrendo ad una espressione di lunghezza scala o tempo scala:

$$l = k^{3/2} / \varepsilon \quad , \quad \tau = k / \varepsilon \quad \text{ed esprimendo la viscosità turbolenta come } \mu_t = \rho C_\mu k^2 / \varepsilon .$$

Ora, se la trattazione si fermasse a questo punto, cioè con una equazione di trasporto dell'energia cinetica e un'equazione algebrica per la definizione di ε , si parlerebbe di *modello ad una equazione*. L'alternativa consiste nell'associare all'equazione differenziale (139) quella del trasporto della dissipazione ε ; si parla allora di *modello a due equazioni*.

E' questa la caratteristica del modello $k - \varepsilon$ che pertanto si completa con la seguente equazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_i \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \varepsilon . \quad (140)$$

i valori delle costanti che compaiono nelle equazioni (139) e (140) sono i seguenti:

$$C_\mu = 0.09 \quad , \quad C_1 = 1.44 \quad , \quad C_2 = 1.92 \quad , \quad \sigma_k = 1 \quad , \quad \sigma_\varepsilon = 1.3$$

5 Capitolo 5

5.1 Lo Strato Limite

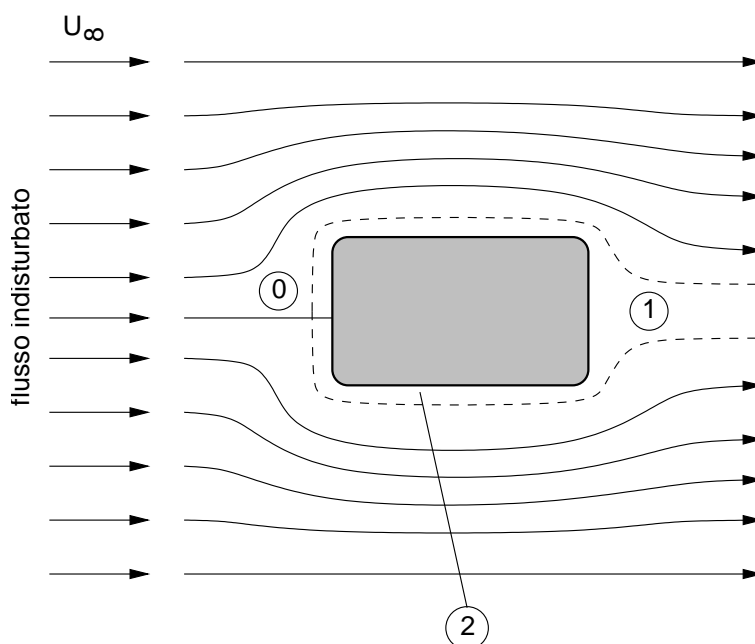


Figura 13: Zone attorno ad un corpo tozzo

Considerando un flusso che investe un corpo tozzo si possono distinguere tre zone: la zona (0) di *flusso esterno* è caratterizzata da un moto a potenziale (vorticità nulla) per il quale gli effetti viscosi non hanno influenza. Nella zona (1), di *scia* (detta anche zona morta), la vorticità non è nulla e comunque gli sforzi viscosi non sono importanti. Il fluido a ridosso del corpo che verrà ora presa in considerazione è detta *strato limite* e si caratterizza per la vorticità non nulla ed effetti viscosi non trascurabili: zona (2).

Vediamo ora di determinare lo spessore dello strato limite, intendendo per “spessore” la dimensione a ridosso della parete del corpo tozzo entro la quale $v_x(y) = 0.99U_\infty$. Nella zona lontana dal corpo, indicando con W la profondità unitaria, la portata volumetrica è data dall’espressione:

$$\frac{Q_{in}}{W} = \int_0^\infty U_\infty dy = cost \quad ,$$

mentre in corrispondenza al corpo tozzo, poichè $v_x(y) \leq U_\infty$ si ha:

$$\frac{Q_p}{W} = \int_0^\infty v_x(y) dy \leq \frac{Q_{in}}{W} \quad .$$

La velocità $v_x(y)$ passa da un valore pari a U_∞ , riscontrabile ad una distanza *sufficiente* dal corpo tozzo, ad un valore pari a zero in corrispondenza del corpo tozzo. La riduzione di $v_x(y)$ implica una

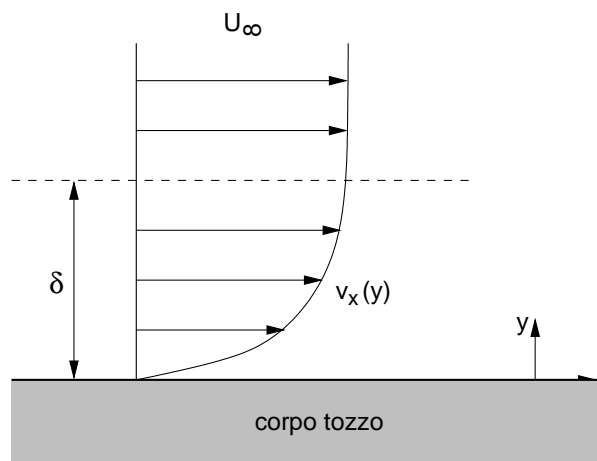


Figura 14: Spessore dello strato limite

riduzione della portata. Tale riduzione può essere determinata ipotizzando che esista un profilo di velocità a gradino (fittizio) in cui $v_x(y \leq \delta^*) = 0$ e $v_x(y > \delta^*) = U_\infty$.

E' possibile calcolare la riduzione di portata associata alla presenza dello strato limite:

$$\frac{Q_{in}}{W} - \frac{Q_p}{W} = \int_0^\infty U_\infty dy - \int_0^\infty v_x(y) dy = \delta^* U_\infty ,$$

da cui quella di spessore dello strato limite:

$$\delta^* = \int_0^\infty \left[1 - \frac{v_x(y)}{U_\infty} \right] dy . \quad (141)$$

Lo spessore di strato limite δ^* ha un preciso significato fisico: misura di quanto "spostare" il profilo di velocità indisturbata per ridurre la portata volumetrica da Q_{in}/W a Q_p/W .

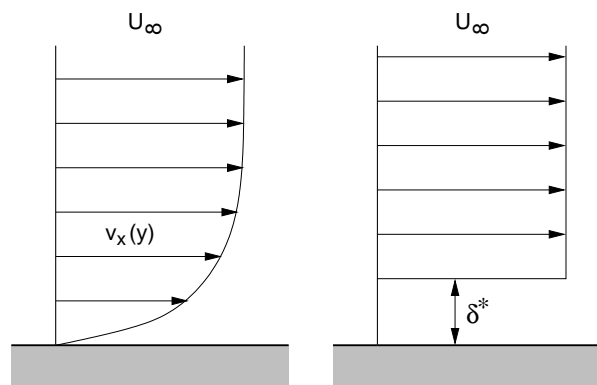


Figura 15: Strato limite fittizio δ^*

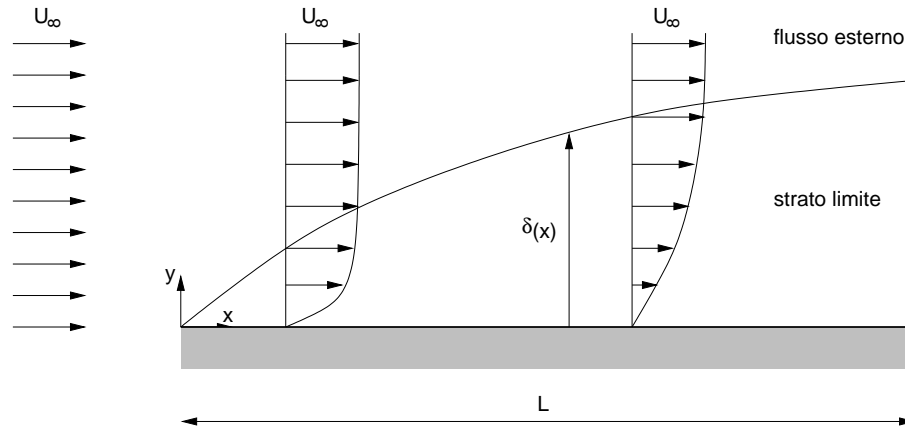


Figura 16: Formazione dello strato limite.

5.2 Le Equazioni dello Strato Limite: Moto Laminare

Lo strato limite è caratterizzato da uno spessore molto piccolo rispetto allo sviluppo nella direzione del flusso. Questo consente di utilizzare per la descrizione di strati limite su superfici curve un sistema di riferimento Cartesiano nel quale la coordinata x è assunta nella direzione del flusso e segue la curvatura della superficie esposta al fluido, mentre la coordinata y è normale alla superficie. Questo schema, a partire dal bordo d'attacco dello strato limite collocato a $x = 0$, è mostrato in figura 16. Nel sistema di coordinate scelto, le equazioni di Navier-Stokes che descrivono il problema sono:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad , \quad (142)$$

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad , \quad (143)$$

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad . \quad (144)$$

Queste equazioni possono essere rese adimensionali rispetto alle due dimensioni caratteristiche lungo x e lungo y , L e δ rispettivamente, dove δ è, indicativamente, lo spessore dello strato limite, ponendo

$$\tilde{x} = \frac{x}{L} \quad , \quad \tilde{y} = \frac{y}{\delta} \quad . \quad (145)$$

Per le velocità si può utilizzare U_∞ come velocità caratteristica lungo x . Lungo y si introduce la velocità V che andrà opportunamente determinata. Per le pressioni si ricorre alla pressione caratteristica Π , che andrà anch'essa opportunamente valutata. L'equazione di conservazione della massa in forma adimensionale è

$$\frac{U_\infty \delta}{VL} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad . \quad (146)$$

Poiché le due derivate devono avere valore simile, è possibile definire la velocità V come $V = U_\infty \delta/L$. Poiché $\delta/L \ll 1$, anche $V/U_\infty \ll 1$. La componente secondo x dell'equazione di N-S diviene

$$\frac{\rho U_\infty \delta^2}{\mu L} \left(\tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}} \right) = -\frac{\Pi \delta^2}{\mu U L} \frac{\partial \tilde{\mathcal{P}}}{\partial \tilde{x}} + \left[\left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2} \right] . \quad (147)$$

In questa equazione, il termine viscoso

$$\left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2} ,$$

deve essere di grandezza paragonabile al termine inerziale

$$\frac{\rho U_\infty \delta^2}{\mu L} \left(\tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}} \right) ,$$

in quanto lo strato limite è, per definizione, quella zona del campo di moto nella quale questi due termini sono ugualmente importanti. Affinché questo avvenga, il gruppo $\rho U_\infty \delta^2 / \mu L$ deve avere ordine di grandezza unitario e può essere utilizzato per definire δ :

$$\delta = \left(\frac{\mu L}{\rho U_\infty} \right)^{-1/2} = L Re^{-1/2} . \quad (148)$$

La pressione caratteristica può essere scelta in modo da rendere unitario il coefficiente del gradiente di pressione

$$\Pi = \frac{\mu U L}{\delta^2} = \rho U_\infty^2 . \quad (149)$$

Con la definizione data allo spessore dello strato limite, dall'equazione (147) risulta chiaramente che il termine $\partial^2 \tilde{v}_x / \partial \tilde{x}^2$ è trascurabile rispetto a $\partial^2 \tilde{v}_x / \partial \tilde{y}^2$ per $Re \gg 1$, e l'eq. (147) diviene

$$\tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{P}}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2} . \quad (150)$$

Utilizzando le definizioni ottenute per δ e Π , la componente secondo y dell'equazione di N-S diviene

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{P}}}{\partial \tilde{y}} = \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \left[\left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}^2} - \tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{x}} - \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}} \right] = 0 . \quad (151)$$

Da questa equazione risulta che $\partial \tilde{v}_y / \partial \tilde{x} \simeq 0$ e che $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x)$. Segue che la pressione all'interno dello strato limite è uguale al valore che assume all'esterno, nella corrente libera, allo stesso valore della coordinata x . Nella corrente libera si assumono condizioni di moto potenziale per le quali vale l'equazione di Bernoulli

$$\mathcal{P} + \frac{1}{2} \rho U_\infty (x)^2 = \text{costante} , \quad (152)$$

$$\frac{d\mathcal{P}}{dx} = -\rho U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} . \quad (153)$$

Con questa posizione le equazioni dello strato limite divengono, in forma dimensionale

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad , \quad (154)$$

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\rho U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad . \quad (155)$$

Queste equazioni vanno integrate con le opportune condizioni al contorno, dopo aver determinato il campo di moto all'esterno dello strato limite.

5.3 Strato Limite Laminare su Parete Piana accelerata istantaneamente

Si supponga di mettere in moto istantaneamente una lastra piana con velocità U costante. Il problema è per sua natura non stazionario, visto che lo stato finale cui si arriva dopo un tempo infinito è quello di distribuzione di velocità uniforme e pari ad U . Le equazioni per $t < \infty$ sono pertanto quelle dello strato limite più un termine dipendente dal tempo.

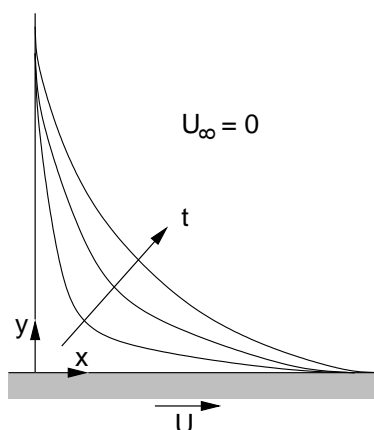


Figura 17: Profili di velocità su lastra piana

Adottando le ipotesi di partenza:

$$v_x = v_x(y, t) \neq 0 \quad , \quad v_y \approx 0 \quad , \quad (156)$$

le equazioni di continuità e di N-S si riducono alle seguenti dove la prima indica un moto completamente sviluppato e nella seconda rimane il termine temporale:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad . \quad (157)$$

Le condizioni al contorno e quelle iniziali sono le seguenti:

- $v_x(y = 0) = U \quad , \quad \forall t$ (velocità fluido = velocità lastra)

- $v_x(y \rightarrow \infty) = U_\infty = 0$, $\forall t$ (velocità fluido indisturbato)
- $v_x(t \leq 0) = 0$, (piastra inizialmente ferma)

Per risolvere l'equazione differenziale di N-S si deve anche ricorrere alla teoria della similitudine, basata sull'ipotesi (da verificare) che i profili di velocità secondo y siano simili ad ogni coordinata x ovvero:

$$\frac{v_x(y, t)}{U} = \phi \left[\frac{y}{\delta(t)} \right] , \quad (158)$$

dove $\delta(t)$ è lo spessore dello strato limite variabile nel tempo mentre ϕ è una funzione della quantità $y/\delta(t)$.

Prima di procedere è bene soffermarsi sul significato dell'equazione (158). In generale $v_x = \phi(U, y, t)$ ma, intuitivamente, è lecito ipotizzare che se U raddoppia/dimezza allora anche v_x raddoppia/dimezza una volta fissati y e t . Allora si può scrivere:

$$v_x = U\phi(y, t) \quad \rightarrow \quad \frac{v_x}{U} = \phi(y, t) . \quad (159)$$

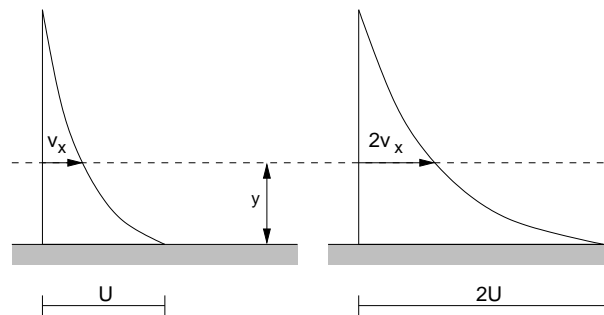


Figura 18: Profili di velocità simili

Essendo inoltre ϕ una funzione di y e t , deve risultare adimensionale. Quindi y e t vanno combinati per ottenere una quantità adimensionale. Tuttavia non è possibile ottenere una quantità adimensionale utilizzando direttamente le loro unità di misura ma si possono usare quelle di y e $\delta(t)$ sfruttando proprio la dipendenza dello spessore δ dal tempo:

$$\frac{v_x(y, t)}{U} = \phi \left[\frac{y}{\delta(t)} \right] . \quad (160)$$

Indicando con $\eta = y/\delta(t) = f(y, t)$ e quindi $v_x(y, t)/U = \phi(\eta)$ si cercherà un'espressione per $\eta(y, t)$ tale che, in virtù della teoria della similitudine risulti:

$$v_x(\eta_1) = v_x(\eta_2) \quad \text{con} \quad \eta_1 = [y/\delta(t)]_1 \quad , \quad \eta_2 = [y/\delta(t)]_2 . \quad (161)$$

In sostanza, dopo queste considerazioni, le equazioni alle derivate parziali di partenza possono essere così riscritte:

$$v_x(y, t) = U\phi(\eta) \quad , \quad (162)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad . \quad (163)$$

Derivando l' equazione (162) rispetto t e y si ottengono le derivate parziali:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{U\phi'y}{\delta^2(t)} \frac{d\delta(t)}{dt} \quad , \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{U\phi'}{\delta(t)} \quad , \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{U\phi''}{\delta^2(t)} \quad , \quad (164)$$

che sostituite nell'equazione (163) forniscono:

$$\phi'' + \frac{\delta(t)}{\nu} \phi' \eta \frac{d\delta(t)}{dt} = 0 \quad . \quad (165)$$

Poichè ϕ è funzione solamente di η , allora deve valere:

$$\frac{\delta(t)}{\partial \nu} \frac{d\delta(t)}{dt} = cost \quad \rightarrow \quad \int_{\delta(0)=0}^{\delta(t)} \delta(t) d\delta(t) = cost \cdot \nu \int_0^t dt \quad \rightarrow \quad \frac{\delta^2(t)}{2} = cost \cdot \nu t \quad (166)$$

da cui si trova:

$$\delta(t) = \sqrt{2 \cdot cost \cdot \nu t} \quad . \quad (167)$$

La soluzione del problema non dipende dal particolare valore della costante. Assumendo arbitrariamente (salvo poi verificarlo) $cost = 2$ si ottengono le seguenti equazioni:

$$\delta(t) = 2\sqrt{\nu t} \quad , \quad (168)$$

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \quad , \quad (169)$$

$$\phi'' + 2\eta\phi' = 0 \quad , \quad (170)$$

di cui l' eq. (169) verifica la condizione di similitudine $v_x(\eta_1) = v_x(\eta_2)$ e l' eq. (170) rappresenta l'equazione di N-S scritta dopo il cambio di variabile $\eta = y/\delta(t)$.

Ricapitolando, per risolvere il problema della lastra piana istantaneamente accelerata, bisogna risolvere l'equazione (170) con le seguenti condizioni al contorno:

$$\bullet \quad y = 0 \quad , \quad v_x = U \quad \rightarrow \quad \eta = 0 \quad , \quad \phi = 1$$

- $y = \infty$, $v_x = v_\infty = 0$ \rightarrow $\eta \rightarrow \infty$, $\phi = 0$
- $t \leq 0$, $v_x = 0$ \rightarrow $\eta \rightarrow \infty$, $\phi = 0$

e si ottiene:

$$\phi = C_1 \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + C_2 . \quad (171)$$

Le costanti di integrazione si trovano tramite le condizioni al contorno:

- $\eta = 0$, $\phi = 1$ \rightarrow $C_2 = 1$
- $\eta = \infty$, $\phi = 0$ \rightarrow $C_1 = 0$.

L'integrale dell' equazione (171) è chiamato *funzione degli errori* o anche $erf(\eta)$ ed è tabulato in funzione di η . Nel caso in esame si ha che:

$$\int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \rightarrow C_1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} . \quad (172)$$

L'equazione (170) ha perciò la seguente soluzione analitica finale:

$$\phi(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta , \quad (173)$$

e quella originale nelle variabili y , t assume la forma:

$$v_x(y, t) = U\phi(\eta) = U \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \right] ; \quad \eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} . \quad (174)$$

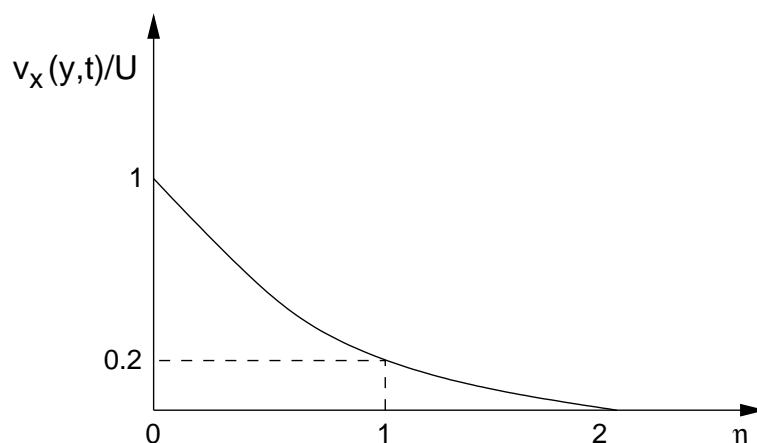


Figura 19: Profilo di velocità in funzione della variabile adimensionale η

5.4 Strato Limite Laminare su Parete Piana

Le equazioni dello strato limite possono essere immediatamente applicate al caso di flusso su di una parete piana, in quanto lontano dalla parete si ha $dU_\infty/dx = 0$ e $\mathcal{P} = \text{costante}$. Le equazioni diventano

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad , \quad (175)$$

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad . \quad (176)$$

Rispetto al caso di lastra accelerata istantaneamente non solo $v_x(x, y)$ ma anche $v_y(x, y)$ risulta non nulla e non è quindi sufficiente definire un cambiamento di variabile η . Bisogna richiamare la definizione data per la funzione di flusso $\psi(x, y)$:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad . \quad (177)$$

La funzione di flusso, proprio per come è definita, soddisfa automaticamente l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \quad , \quad -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad . \quad (178)$$

e l'equazione di N-S diventa:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad . \quad (179)$$

A questo punto è possibile introdurre la variabile adimensionale η , definita a partire dall'ipotesi di similitudine dei profili di velocità, che nel caso in esame diventa:

$$\frac{v_x(x, y)}{U_\infty} = \phi \left[\frac{y}{\delta(x)} \right] = \phi(\eta) \quad . \quad (180)$$

Eseguendo gli stessi passaggi matematici visti nel caso di lastra accelerata istantaneamente si perviene (dimostrazione omessa) alla seguente espressione:

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad \rightarrow \quad \delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad . \quad (181)$$

Come visto in precedenza, l'introduzione della variabile adimensionale η permette di esprimere sia v_x che v_y in funzione di η stessa. Una possibile scelta è:

$$\psi = f(\eta) \quad \rightarrow \quad v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial f(\eta)}{\partial y} = -\frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{df(\eta)}{d\eta} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} = -f'(\eta) \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad . \quad (182)$$

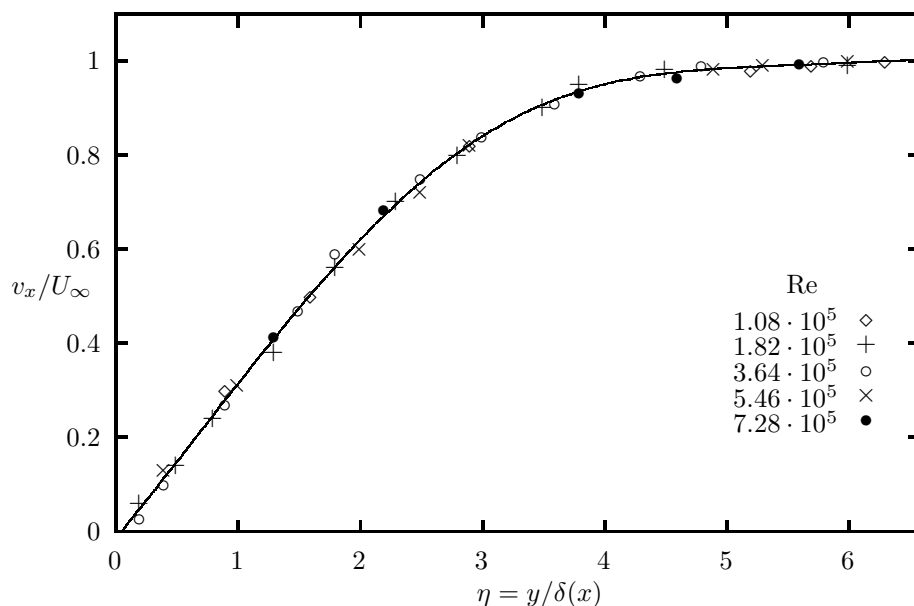


Figura 20: Andamento della velocità nello strato limite in funzione della coordinata adimensionale, η .

L'espressione trovata mostra che v_x dipende sia da η che da x . Poichè vogliamo eliminare la dipendenza da quest'ultima è necessaria una diversa definizione di ψ :

$$\psi = -\sqrt{U_\infty \nu x} f(\eta) \quad \rightarrow \quad v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\sqrt{U_\infty \nu x} \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -U_\infty f'(\eta) \quad . \quad (183)$$

Ora v_x dipende solo da η e l'equazione (179), una volta effettuate le sostituzioni e sviluppate le derivate, si riduce alla seguente equazione differenziale a alle derivate parziali:

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad , \quad (184)$$

con le seguenti condizioni al contorno:

- $v_x(y = 0) = 0 \quad \rightarrow \quad v_x = U_\infty f'(\eta) = 0 \quad \rightarrow \quad f'(\eta = 0) = 0$
- $v_y(y = 0) = 0 \quad \rightarrow \quad f(\eta = 0) = 0$
- $v_x(y = \infty) = v_\infty \quad \rightarrow \quad f'(\eta = \infty) = 1$

L'integrazione dell'eq. (184), che può essere fatta solo per via numerica e non analitica, porta alla soluzione rappresentata in figura 20. Apparentemente non è stata usata la condizione $v_x = U_\infty$ per $x \leq 0$. In realtà, avendo posto a $x = 0$ $\delta = 0$ si ha $\eta = y/\delta(0) = \infty$ e pertanto questa condizione risulta già considerata.

Inoltre, sempre numericamente, è possibile ricavare lo sforzo di taglio agente sulla piastra. A partire dalla definizione di taglio e ricordando le espressioni di ψ e di η si trova:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu \sqrt{U_\infty \nu x} \cdot \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial \eta^2} = \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \cdot \left(f'' \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \right) = \frac{\mu U_\infty}{\delta(x)} f'' \quad . \quad (185)$$

All'aumentare della coordinata x lungo la lastra piana τ_w diminuisce. Questo è dovuto al fatto che τ_w è proporzionale all'inclinazione del profilo di velocità che si riduce proprio all'aumentare di x .

5.5 Strato Limite su Lastra Piana: Caso di Moto Turbolento

Premesso che la turbolenza si genera, come già osservato, in presenza di un gradiente trasversale della velocità, è usuale la distinzione fra turbolenza di parete e turbolenza libera. La prima specie, di cui ci siamo occupati, si manifesta per il fatto che avvicinandosi ad una parete il moto è necessariamente ritardato (la velocità a contatto è quella della parete). La seconda specie di turbolenza si presenta a seguito di differenze di velocità che trovano origine all'interno del fluido, come è il caso di un getto che penetri entro un ambiente dello stesso fluido in quiete. In ogni caso il fenomeno è conservativo, nel senso che la turbolenza risulta dagli stessi sforzi resistenti, e questi a loro volta persistono a causa delle fluttuazioni turbolente. Nel presente paragrafo si considera la turbolenza di parete, di cui al paragrafo 4.1, trattando il moto turbolento in un tubo, è già stata vista la legge di distribuzione della velocità.

Sarebbe cosa utile se anche per lo strato limite nel moto turbolento si potessero ottenere delle espressioni, per il profilo di velocità e lo sforzo di taglio, simili a quelle viste nel caso laminare, magari partendo dalle stesse ipotesi e usando gli stessi metodi di risoluzione. Tuttavia, causa la non completa conoscenza dei fenomeni presenti nella zona di transizione e le leggi che regolano l'attrito sulla parete, non è stato possibile pervenire a simili equazioni differenziali. Si può disporre solo di metodi approssimati, basati sull'integrazione dell'equazione del momento della quantità di moto. Il caso più semplice di strato limite turbolento, di seguito affrontato, è quello su lastra piana con angolo di incidenza del flusso nullo. La semplicità di questo caso, di grande importanza pratica per l'ingegneria aeronautica, deriva dal fatto che essendo nullo l'angolo di incidenza il gradiente di pressione lungo la parete è nullo, sicché la velocità all'esterno dello strato limite è costante.

Considerando perciò una lastra piana (fig. 21) lambita da una corrente fluida avviene che dopo un certo tratto iniziale, in seguito a circostanze che determinano l'instabilità, si ha l'insorgere della turbolenza. Ricerche di vari autori hanno messo in evidenza un valore critico del numero di Reynolds, riferito alla velocità esterna U_∞ e alla distanza L dal bordo:

$$Re_c = \left(\frac{U_\infty L}{\nu} \right)_c = 3.5 \cdot 10^5 \div 1 \cdot 10^6 \quad (186)$$

al di là del quale lo strato limite diventa turbolento. Il passaggio è influenzato da varie circostanze, quali la scabrezza della parete ed il grado di turbolenza proprio della corrente esterna.

La presenza della parete stessa impedisce il manifestarsi di fluttuazioni turbolente nelle immediate vicinanze, cosicché il moto resterà necessariamente viscoso in un sottile strato δ' , comunemente detto sottostrato limite laminare, in cui lo sforzo tangenziale dipende solo dalla viscosità molecolare. Qui si può ammettere, dato il piccolo spessore, che la distribuzione della velocità $v_x = \overline{v_x}$ vari linearmente con la distanza dalla parete e che lo sforzo tangenziale abbia quindi valore costante τ_w pari a quello alla parete, in base alla legge (già vista per lastra piana fissa e moto laminare):

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (187)$$

La figura illustra schematicamente le modificazioni che intervengono nello strato limite col passaggio a turbolento; si nota un rilevante aumento dello spessore, δ_{turb} , in confronto a quello, δ_{lam} , del moto laminare, ed una maggior uniformità della velocità, che mantiene un valore prossimo a U_∞ sino a breve distanza dalla parete. Di conseguenza è più forte che nel caso laminare il gradiente della velocità a contatto con la parete, quindi aumenta la resistenza tangenziale d'attrito.

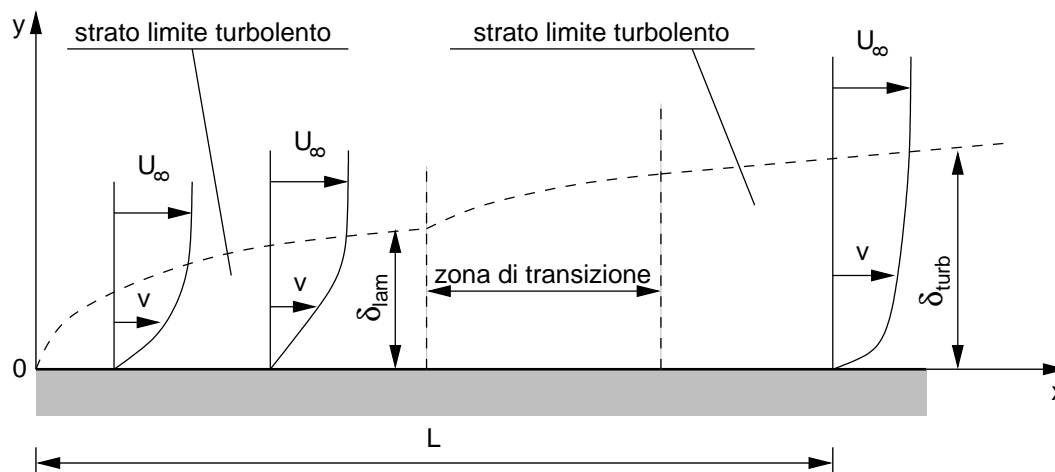


Figura 21: Strato limite turbolento

Per valutare lo spessore dello strato limite turbolento δ_{turb} può per semplicità applicarsi una legge approssimata, dedotta su basi sperimentali precedentemente a quella logaritmica, detta “legge delle potenze”:

$$\frac{\overline{v_x}}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta_{turb}} \right)^{1/7} \quad (188)$$

Con un procedimento analogo a quello che ha condotto al calcolo dello spessore di strato limite per il caso laminare, si trova, per quello turbolento:

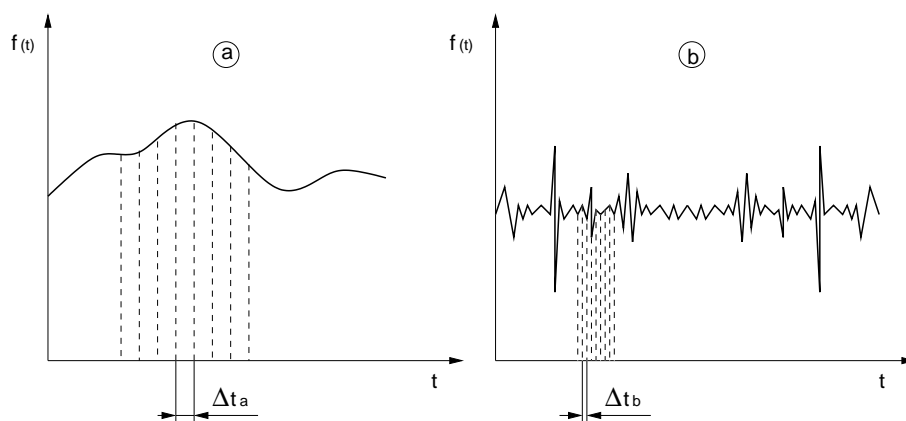
$$\left(\frac{\delta}{L} \right)_{turb} = \frac{0.377}{(Re_L)^{1/5}} \quad (189)$$

Ne discendono le seguenti valutazioni (valide per $Re_L < 10^7$) per il coefficiente locale di resistenza:

$$f = \frac{0.059}{(Re_L)^{1/5}} \quad (190)$$

Dall'applicazione della legge logaritmica si ottiene invece l'espressione per il coefficiente locale C_a , molto simile a quella proposta da Von Karman.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{1}{k} \ln (Re_L \sqrt{f}) + C_4 \quad . \quad (191)$$

Figura 22: Scelta del Δt di campionamento

A Elementi di Statistica

Per analizzare un segnale tempovariante di qualsiasi tipo è opportuno ricorrere a strumenti statistici che ne descrivano l'andamento attraverso delle costanti sintetiche. L'uso della statistica è giustificato ancor più dal fatto che la misurazione di una grandezza fisica (segnale) avviene sempre per campionamento della stessa ad intervalli di tempo stabiliti. Senza entrare nel dettaglio delle tecniche di acquisizione dei segnali possiamo dire che l'ampiezza dell'intervallo di tempo va scelta in base a due esigenze:

- la variabilità del segnale rispetto il tempo (forma del segnale)
- la periodicità del segnale; questo per evitare i ben noti problemi di "aliasing".

Dalla figura 22 appare evidente la necessità di adottare un tempo di campionamento diverso a seconda dei segnali.

Il campionamento ha come risultato quello di fornire migliaia di valori numerici, generalmente memorizzati su supporto magnetico, che però avrebbero poco senso se non venissero elaborati al fine di fornire delle distribuzioni dei valori misurati. A questo proposito la figura 23 mostra come si costruisce una distribuzione di probabilità di un campione: una volta diviso l'intervallo della totalità dei valori in classi, per ciascuna di esse si calcola la percentuale con cui un certo valore si è verificato. Ne segue un *raggruppamento discreto* dei valori misurati in classi; quella così ottenuta è la distribuzione di frequenza discreta. Se l'intervallo di definizione della classe tende a 0 si ottiene una distribuzione continua di probabilità meglio nota come PDF (probability density function). Al fine di diagnosticare maggiormente un campione di dati risulta utile calcolare alcune grandezze dette *costanti di forma* e che sono menzionate di seguito.

A.1 Costanti di Forma

Le costanti di forma fanno parte dei *momenti centrali* detti anche *momenti rispetto la media* poichè contengono momenti della variabile casuale *scarto* ($f_i - \mu$).

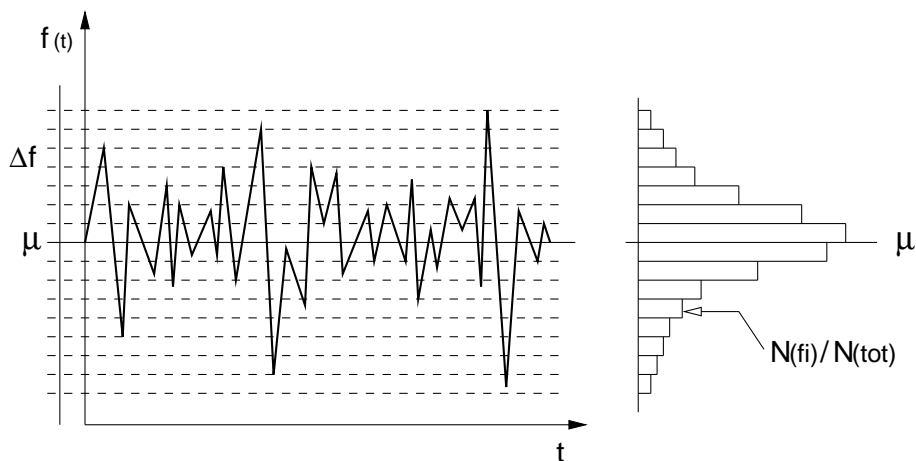


Figura 23: Costruzione della pdf (probability density function)

A.1.1 Media μ

Viene definita come:

$$\mu = \sum_{i=1}^N \frac{f_i}{N} , \quad (192)$$

nella quale va inteso $f_i = f(t_i)$ e N è la totalità dei valori campionati. E' un momento di ordine 1 e fornisce informazioni sulla posizione, sulla dislocazione dei valori in esame.

A.1.2 Varianza e Deviazione Standard

La varianza dà una misura di quanto il valore istantaneo si discosta dalla media μ ed è espressa come:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(f_i - \mu)^2}{N} . \quad (193)$$

Essendo un momento di secondo ordine evita che valori positivi e negativi si elidano. E' tanto più piccola quanto più i valori sono accentrati attorno μ ed è per questo che funge da indice di dispersione. La radice della varianza, σ , è detta anche deviazione standard e la figura 24 ne riporta una rappresentazione abbinata alla forma del segnale da cui viene estratta.

A.1.3 Asimmetria (Skewness)

E' definita come:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\frac{f_i - \mu}{\sigma} \right)^3}{N} . \quad (194)$$

A differenza della varianza può avere segno positivo o negativo visto che il termine in parentesi è un momento del terzo ordine dello scarto rispetto la media. Il segno di α indica se i valori campionati,

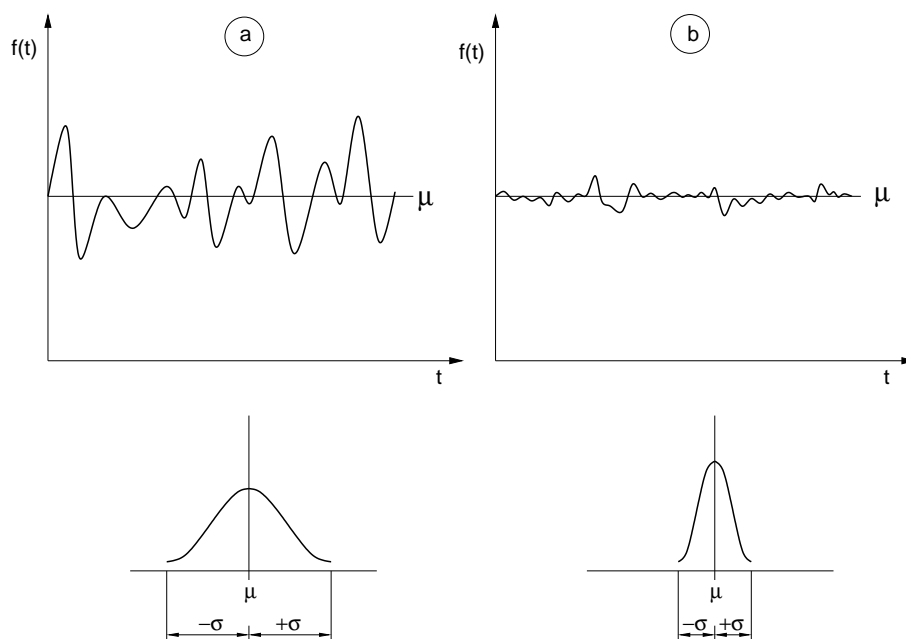


Figura 24: Deviazione standard

pur attestandosi attorno un valore medio μ , sono *sbilanciati* al di sopra (segno positivo) o al di sotto della media (segno negativo) come mostrato in figura 25.

A.1.4 Flatness (Curtosi)

E' definita dall'espressione:

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\frac{f_i - \mu}{\sigma} \right)^4}{N} . \quad (195)$$

Il termine in parentesi, cioè la differenza fra il valore i-esimo e la media del campione, rappresenta un momento del quarto ordine e perciò ha sempre valore positivo. Questa costante di forma ha lo scopo di misurare il *peso delle code*, cioè dei valori estremi di una distribuzione. Come mostra la figura 26 un valore prossimo allo 0 di β indica un forte addensamento dei valori attorno alla media, il che si traduce in una forma appuntita della PDF.

A.2 Funzioni One-point-statistic, Two points statistic

Attraverso le costanti di forma si dà una descrizione della PDF. E' possibile che si abbia la necessità di indagare ulteriormente la struttura temporale del segnale come la presenza di periodicità o la cadenza con la quale un certo valore di picco compare nel tempo. Sarebbe inoltre interessante capire se e quanto un segnale, che poi è la rappresentazione di una grandezza fisica, sia in relazione con quello di un'altra. Più in generale esistono casi in cui, trovandosi alle prese con due variabili X e Y , assume rilevante importanza analizzare se esse variano concordemente o meno. Nel caso

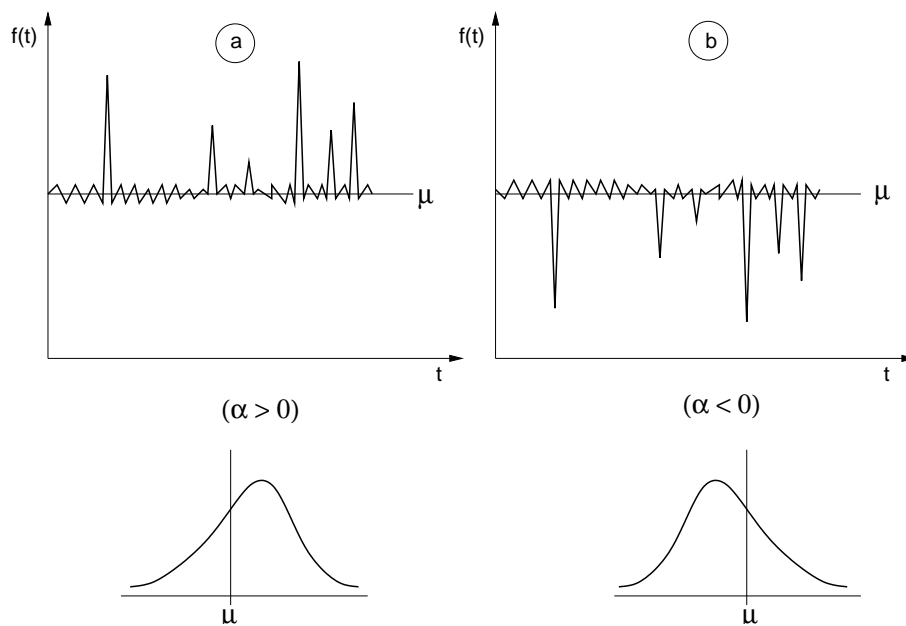


Figura 25: Asimmetria (Skewness)

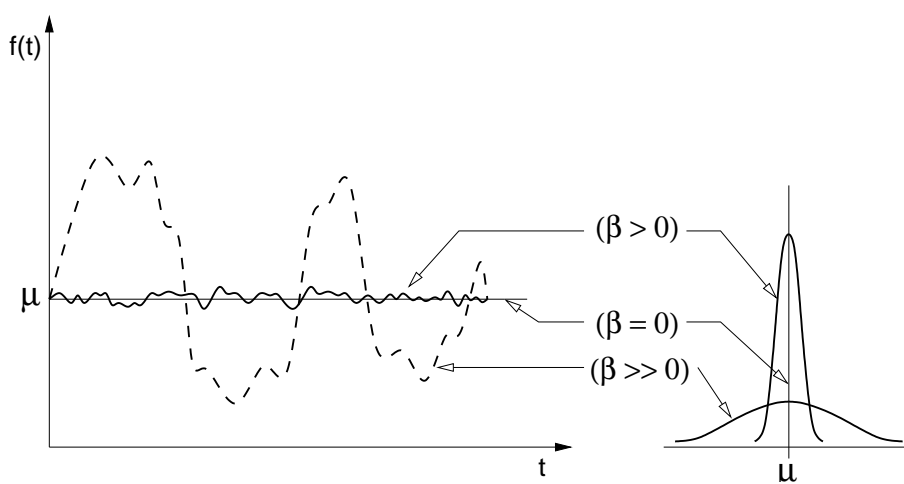


Figura 26: Flatness (Curtosi)

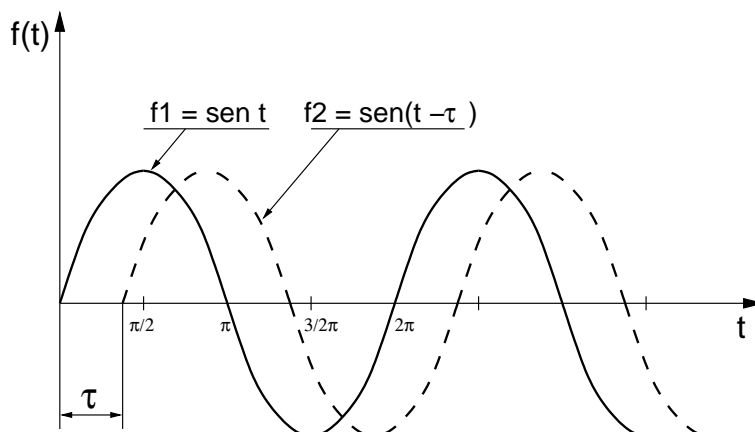


Figura 27: Segnali tempovarianti sfasati

fluidodinamico si può essere interessati a capire se, nello stesso punto di un campo fluido tridimensionale, esiste ad esempio una relazione fra la variazione temporale della componente tangenziale e quella azimutale della velocità. Analogamente si potrebbe indagare se, in punti diversi dello stesso campo fluido, vi sia una relazione fra la variazione temporale della stessa variabile misurata (è il caso dell'aumento di portata di un fiume, a valle, rispetto alle precipitazioni avvenute a monte qualche ora prima).

A tali fini si ricorre ad altre funzioni statistiche di seguito discusse.

A.2.1 Covarianza

Una misura del grado in cui due variabili sono legate linearmente è data dalla covarianza. Si dice anche, al riguardo, che due variabili manifestano una certa tendenza a muoversi insieme. Prendiamo come esempio due funzioni sinusoidali f_1 e f_2 , uguali per semplicità, una in ritardo di τ rispetto l'altra (fig. 27).

Si definisce covarianza dei due segnali f_1 e f_2 la relazione così definita:

$$cov_{(\tau)} = \langle f_1(t) f_2(t-\tau) \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N f_1(t_i) f_2(t_i-\tau)}{N} \quad (196)$$

I valori assunti dalla covarianza sono riportati in figura 28 dalla quale si evince come siano legati al ritardo τ (o allo sfasamento) dei due segnali. In particolare il punto A , massimo della covarianza, si verifica se $\tau = 0$ cioè se i due segnali non sono sfasati.

Il punto B è il valore nullo che si ha in corrispondenza di un ritardo fra i segnali pari a $\tau = T/4$ ossia uno sfasamento di $\pi/2$.

il punto di minima covarianza C , corrisponde ad un ritardo di $\tau = T/2$ e uno sfasamento di π .

E' bene ricordare che la curva riportata in figura 28 è specifica per i due segnali in esame, cioè perfettamente uguali e perfettamente periodici. In generale, per segnali che non presentano queste caratteristiche, i punti A e D hanno valori diversi.

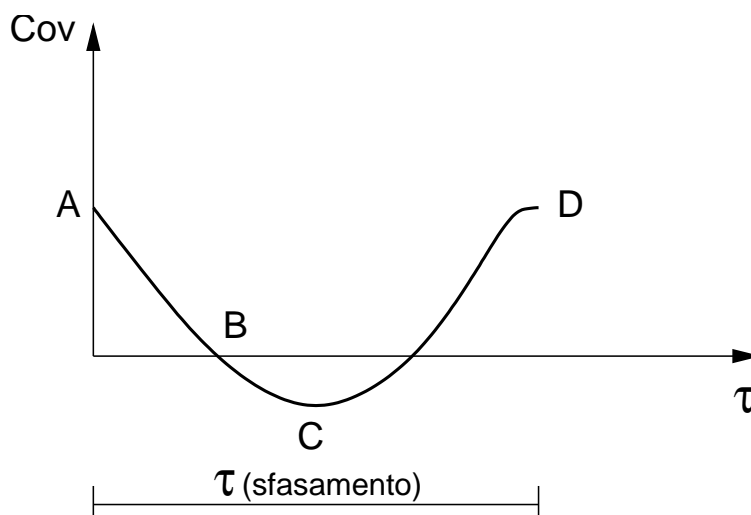


Figura 28: Curva della covarianza

A.2.2 Autocorrelazione e Correlazione

In generale le funzioni di correlazione forniscono una misura di quanto due segnali abbiano proprietà comuni, se si assomigliano, in relazione ad un loro ritardo nel tempo. Si parla di autocorrelazione quando si vuole indagare la somiglianza di un segnale con se stesso ritardato nel tempo.

Si definisce autocorrelazione la funzione:

$$\rho(\tau) = \langle f1_{N(t)}f1_{N(t-\tau)} \rangle \quad , \quad (197)$$

dove

$$f1_N = \frac{f_i - \mu}{\sigma}$$

Nel caso di un segnale periodico la funzione di autocorrelazione presenta dei picchi ad ogni periodo T come mostra la figura 29.

Questa funzione ha un significato molto importante nello studio dei moti turbolenti. Si faccia riferimento alla figura 30 che riporta l'autocorrelazione di un segnale in tempi diversi (one point - two times statistic). La linea tratteggiata rappresenta l'autocorrelazione del segnale nel caso di moto laminare e stazionario (il segnale è sempre uguale a se stesso). La linea continua rappresenta invece l'autocorrelazione dello stesso segnale nel caso di moto turbolento. E' importante sottolineare che l'integrale sotteso da questa curva rappresenta la scala temporale integrale, ossia l'arco temporale entro il quale il segnale dipende dai suoi valori precedenti: se associamo alla variazione del segnale la presenza di una struttura vorticoso, la scala integrale rappresenta il tempo entro cui una struttura turbolenta è coerente.

Nel caso si volessero confrontare i segnali di due grandezze fisiche, rilevati nello stesso tempo ma in punti diversi, si parla semplicemente di cross-correlazione (multivariable, single point - single time statistic). In questo caso la correlazione è definita come:

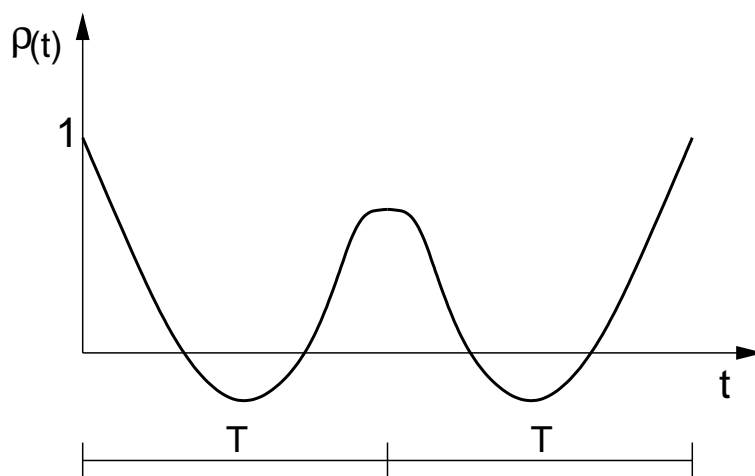


Figura 29: Funzione di autocorrelazione

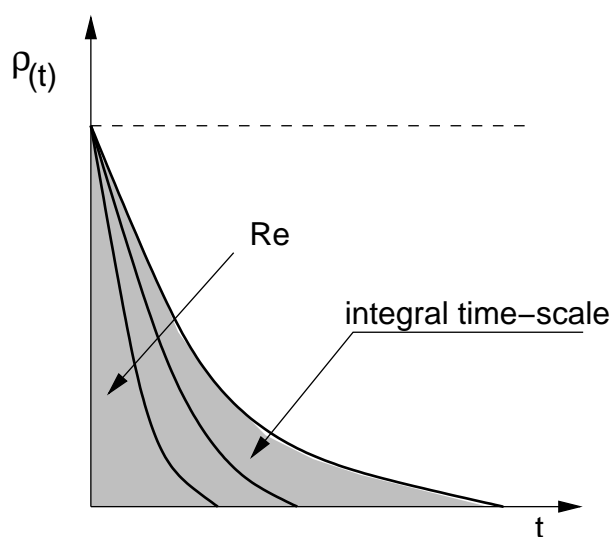


Figura 30: Funzione di autocorrelazione time-scale

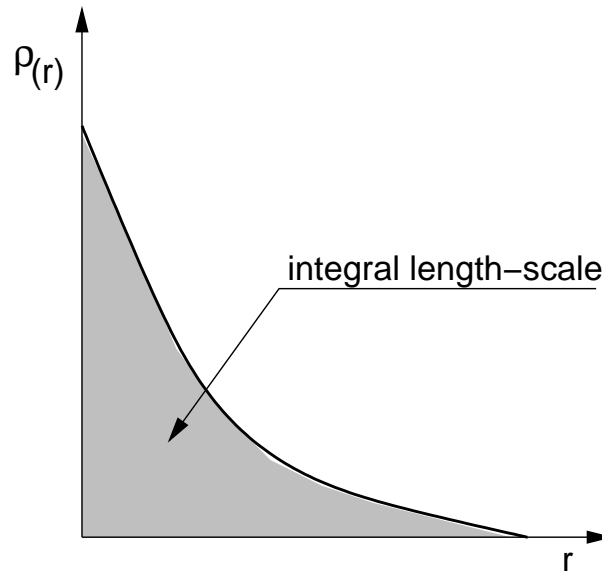


Figura 31: Funzione di correlazione length-scale

$$\rho_{ij} = \langle f_i g_j \rangle \quad . \quad (198)$$

Se f e g fossero le fluttuazioni v'_x e v'_y la correlazione sarebbe data da $\langle v'_x v'_y \rangle$ e quindi rappresenterebbe una componente degli stress di Reynolds.

Andando ancor più oltre si potrebbe, allo stesso modo, calcolare la correlazione con l'intento di ricercare una parentela spaziale dello stesso segnale single variable (multipoint - single time statistic) rilevato allo stesso tempo ma in punti diversi del flusso:

$$\rho(r) = \langle f1_{(x)} f1_{(x+r)} \rangle \quad . \quad (199)$$

Il risultato di questa funzione è rappresentato nella figura 31 e stabilisce la scala spaziale entro la quale una struttura turbolenta è coerente. Quest'ultimo concetto è già stato menzionato, attraverso l , nell'espressione di viscosità turbolenta di Prandtl.

Riferimenti bibliografici

- [1] P. Andreussi - A. Soldati, Fluidodinamica di processo, elementi di teoria ed esercizi, ETS Pisa, 2000.
- [2] H. Schlichting, Boundary-Layer Theory, Mc Graw-Hill, 1968.
- [3] S.B.Pope, Turbulent Flows, Cambridge University, 2003.
- [4] G. Comini, Fondamenti di termofluidodinamica Computazionale, SGE editoriali Padova, 2004.
- [5] O. Vitali, Statistica per le scienze applicate, Cacucci editore Bari, 1991.