Flusso in cavità quadrata - Lid driven cavity flow

L'obiettivo dell'esercitazione è la simulazione fluidodinamica del flusso in cavità quadrata indotto dal moto della parete superiore della cavità stessa.

- *Fondamenti matematici del problema*

La risoluzione del problema del flusso in cavità quadrata si può effettuare riscrivendo convenientemente le equazioni di Navier-Stokes in termini di ψ (funzione di corrente) e ω (vorticità);

Indicando con V il campo (vettoriale) di velocità, e con u e v le sue componenti rispettivamente lungo x e lungo y, si può procedere come segue:

$$\omega = rot\,V = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\kappa$$ (1) (Definizione di vorticità nel caso bidimensionale in esame)

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$ (2) (Relazioni di Riemann tra funzione di corrente e velocità)

A questo punto, combinando l'equazione (2) con l'equazione (1), e trascurando la notazione vettoriale, si trova:

$$\omega = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \psi$$

$$\boxed{\omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}}$$ (3) (equazione di Poisson per la funzione di corrente)

La seconda, fondamentale equazione per descrivere il problema in esame é l'equazione di trasporto della vorticità. Si considerino, inizialmente, le equazioni di Navier-Stokes:

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

In notazione vettoriale:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla u = -\nabla P + \mu \nabla^2 u$$

Applicando l'operatore rotore ad entrambi i membri dell'equazione:

$$\nabla \times \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \times \rho \vec{u} \cdot \nabla u = -\nabla \times \nabla P + \nabla \times \mu \nabla^2 u$$

ovvero:

$$\nabla \times \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \times \vec{u} \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho} \nabla \times \nabla P + \nabla \times \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 u$$

A questo punto, usufruendo di opportune identità vettoriali, si giunge a scrivere, per il caso bidimensionale:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u\omega)+\frac{\partial}{\partial y}(v\omega)=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)$$

Vale inoltre che:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u\omega)+\frac{\partial}{\partial y}(v\omega)=u\frac{\partial \omega}{\partial x}+\omega\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial y}+\omega\frac{\partial v}{\partial y}=\omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+u\frac{\partial \omega}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial y}$$

ed anche:

$$div\,V=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

L'equazione che descrive il trasporto della vorticità assume pertanto la forma:

$$\boxed{\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\frac{\partial \omega}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)}$$

L'analisi del problema passa attraverso la risoluzione delle seguenti equazioni, che descrivono l'evoluzione del sistema in esame:

$$\omega=\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad + \quad v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\omega=\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\frac{\partial \omega}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)$$

- *Discretizzazione delle equazioni*

Una volta effettuata la discretizzazione del dominio (ad es. utilizzando una griglia di punti uniformemente distribuiti), è necessario compiere una analoga operazione di discretizzazione sulle equazioni, per poter passare dalla formulazione differenziale (definita nel continuo) alla formulazione discreta (definita, appunto, nel dominio discreto).

-<u>componenti di velocità</u>

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_{i,j}\simeq\left(\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}}{2\Delta \mathrm{y}}\right)}$$

$$v=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{i,j}\simeq-\left(\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{2\Delta \mathrm{x}}\right)}$$

-<u>trasporto vorticità</u>

a) termine convettivo:

$$u\frac{\partial \omega}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial y}\simeq u_{i,j}\left(\frac{\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}}{2\Delta x}\right)+v_{i,j}\left(\frac{\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}}{2\Delta y}\right)$$

b) termine diffusivo

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)\simeq\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\omega_{i+1,j}-2\omega_{i,j}+\omega_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{\omega_{i,j+1}-2\omega_{i,j}+\omega_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right]$$

c) termine tempo-dipendente

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}\simeq\frac{\omega_{i,j}^{n+1}-\omega_{i,j}^{n}}{\Delta t}$$

Pertanto l'equazione di trasporto della vorticità può essere discretizzata come segue:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\frac{\partial \omega}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}\omega_{i,j}^{n+1}=\omega_{i,j}^{n}+\Delta t\left[\left(-u_{i,j}^{n}\frac{\omega_{i+1,j}^{n}-\omega_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}-v_{i,j}^{n}\frac{\omega_{i,j+1}^{n}-\omega_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}\right)\right]+\\+\frac{\Delta t}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\omega_{i+1,j}^{n}-2\omega_{i,j}^{n}+\omega_{i-1,j}^{n}}{\Delta x^2}+\frac{\omega_{i,j+1}^{n}-2\omega_{i,j}^{n}+\omega_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2}\right)\end{aligned}}$$

-<u>equazione (ellittica) di Poisson</u>

$$\boxed{\omega_{i,j}^{n}=\left(\frac{\psi_{i+1,j}^{n}-2\psi_{i,j}^{n}+\psi_{i-1,j}^{n}}{\Delta x^2}+\frac{\psi_{i,j+1}^{n}-2\psi_{i,j}^{n}+\psi_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2}\right)}$$

(NOTA: l'equazione di Poisson va scritta esplicitando la variabile $\psi_{i,j}^{n}$).

- *Struttura logica del Solver*

La sequenza delle operazioni seguite per risolvere il problema è la seguente:

Step 0: inizializzare le matrici (valori nodali) rappresentative delle variabili del problema (comp. di velocità, vorticità, funzione di corrente, etc.).

Step 1: soluzione dell'equazione di Poisson (nella parte centrale del dominio, i.e. esclusi i punti griglia posizionati sul bordo della cavità) noto il campo di vorticità all'istante precedente.

Step 2: calcolo del campo di moto per derivazione della funzione di corrente ottenuta risolvendo l'equazione di Poisson.
Step 3: calcolo dei valori della vorticità al bordo, essendo noti i valori della funzione di corrente nei nodi adiacenti.

Step 4: soluzione dell'equazione di trasporto della vorticità per calcolarne il campo di valori all'istante successivo.

Step 5: calcolati i valori aggiornati del campo di vorticità, si risale allo step 1 per ripercorrere il ciclo risolutivo.

- *Equazione di Poisson: metodo risolutivo*

Per poter risolvere l'equazione di Poisson per la funzione di corrente, si è ritenuto opportuno utilizzare un metodo di sovrarilassamento (SOR); poiché questi metodi richiedono l'imposizione di un "peso" attraverso il quale aggiornare la soluzione, è necessario determinare l'entità di questo coefficiente in modo da minimizzare il numero di iterazioni necessarie per giungere a convergenza.

- *Condizioni al contorno (per la vorticità)*

Per definire le condizioni al contorno per la vorticità è necessario espandere in serie di Taylor la funzione di corrente nei nodi di frontiera del dominio. Gli sviluppi in serie portano ai seguenti risultati:

- parete verticale sinistra (ferma)

$$\omega_{1,j}=\frac{0.5}{dx^2}\left(8\psi_{2,j}-\psi_{3,j}\right)$$

-parete verticale destra (ferma)

$$\omega_{nl+1,j}=\frac{0.5}{dx^2}\left(8\psi_{nl,j}-\psi_{nl-1,j}\right)$$

-parete orizzontale inferiore (ferma)

$$\omega_{i,1}=\frac{0.5}{dy^2}\left(8\psi_{i,2}-\psi_{i,3}\right)$$

-parete orizzontale superiore (in movimento)

$$\omega_{i,nh+1}=\frac{0.5}{dy^2}\left(8\psi_{i,nh}-\psi_{i,nh-1}\right)+\frac{3U}{dy}$$