

Soluzione Esercitazione 1

La teoria è stata sviluppata a lezione. Si faccia riferimento al capitolo 4.5.3 (pagina 166) del libro. Va ricordato che l'equazione differenziale da integrare varia leggermente a seconda della definizione adottata per la variabile di similitudine:

- se $\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$ si ottiene $f''' + \frac{1}{2}ff''$;
- se $\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu x}}$ si ottiene $f''' + ff''$.

Quest'ultima equazione verrà utilizzata come equazione di riferimento nel seguito.

Per tracciare l'andamento della funzione di flusso lungo il piano la esprimiamo come:

$$\Psi = -U_\infty \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \cdot f(\eta) = -\nu \sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}} \cdot f(\eta)$$

$$\Psi = -\nu \sqrt{Re} \cdot f(\eta).$$

Disegniamo quindi l'andamento della quantità Ψ/ν in funzione di Re per diversi valori del numero di η .

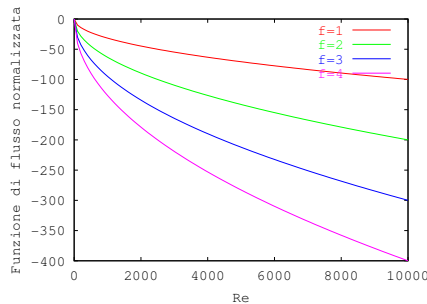


FIG. 1. Andamento della funzione di flusso Ψ/ν lungo la piastra piana.

Analogamente, per la velocità si ha: $v_x = U_\infty f'(\eta)$. Si noti che v_x/U_∞ non dipende dal valore del numero di Reynolds, Disegniamo quindi l'andamento della quantità v_x/U_∞ in funzione di η : si ottiene esattamente la fig. 4.22 a pag. 169 del testo.

Per il taglio si ricava:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu U_\infty \frac{\partial f'}{\partial \eta} = \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \cdot f''(\eta) = \\ &= \rho U_\infty^2 \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty x}} f''(\eta) = \rho U_\infty^2 \frac{1}{\sqrt{Re}} f''(\eta) \end{aligned}$$

In questo caso, disegniamo la quantità $\tau_{xy}/\rho U_\infty^2$ in funzione di Re per diversi valori di η .

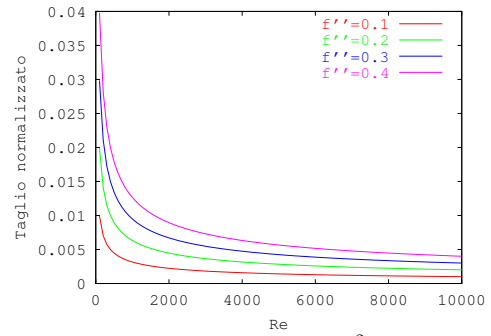


FIG. 2. Andamento del taglio $\tau_{xy}/U_\infty^2 \nu$ lungo la piastra piana.

Infine, l'andamento dello spessore dello strato limite varia a seconda della definizione:

1. δ_{99} : $v_x(\delta_{99}) = 0.99U_\infty \rightarrow f' = 0.99$ in base alla definizione di v_x . Ma $f' = 0.99 \rightarrow \eta = 3.5$ dalla tabella. Inoltre:

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} = 3.5$$

$$\rightarrow y = \delta_{99} = 3,5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} = 3,5 \frac{\nu}{U_\infty} \sqrt{Re}$$

Disegniamo quindi l'andamento della quantità $\delta_{99} U_\infty / \nu$ in funzione di Re .

2. $\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{U_\infty}\right) dy = \int_0^\infty (1 - f') \delta(x) d\eta$

essendo $\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} = \frac{y}{\delta(x)} \rightarrow d\eta = dy/\delta(x)$. Possiamo riscrivere:

$$\delta^* = \delta(x) \int_0^\infty (1 - f') d\eta =$$

$$= \delta(x) \left[\int_0^6 (1 - f') d\eta + \int_6^\infty (1 - f') d\eta \right].$$

Dalla tabella, si deduce che il secondo integrale è praticamente nullo poiché $f' \rightarrow 1$ per $\eta > 6$. Quindi, consideriamo solo il primo integrale e ricaviamo:

$$\delta^* = \delta(x) \int_0^6 (1 - f') d\eta = \delta(x) (\eta|_0^6 - f|_0^6) =$$

$$= [(6 - 0) - (4.78322 - 0)] \delta(x) = 1,21678 \delta(x).$$

A tale risultato si poteva giungere altra via, sfruttando i dati riportati in tabella per η e per f' e calcolando numericamente l'integrale $\int_0^6 (1 - f')d\eta$. Con riferimento alla figura 5, si ottiene $\delta^* = 1,660072 \delta(x)$. Il valore analitico dell'integrale non viene esattamente riprodotto dal calcolo numerico: in quest'ultimo caso si commette un'errore del 4%.

eta	f	f' d(eta)	(1-f) d(eta)	f'(1-f) d(eta)	(f')^2 d(eta)
0.00	0.000000	0.0000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.10	0.046960	0.0046960	0.09530400	0.00447548	0.00022052
0.20	0.093910	0.0093910	0.09060900	0.00850909	0.00088191
0.30	0.140810	0.0140810	0.08591900	0.01209825	0.00198275
0.40	0.187610	0.0187610	0.08123900	0.01524125	0.00351975
0.50	0.234230	0.0234230	0.07657700	0.01793663	0.00548637
0.60	0.289580	0.0289580	0.07104200	0.02057234	0.00838566
0.70	0.326530	0.0326530	0.06734700	0.02199082	0.01066218
0.80	0.371960	0.0371960	0.06280400	0.02336058	0.01383542
0.90	0.416720	0.0416720	0.05832800	0.02430644	0.01736556
1.00	0.460630	0.0460630	0.05393700	0.02484500	0.02121800
1.10	0.503540	0.0503540	0.04964600	0.02499875	0.02535525
1.20	0.545250	0.0545250	0.04547500	0.02479524	0.02972976
1.30	0.585590	0.0585590	0.04144100	0.02426744	0.03429156
1.40	0.624390	0.0624390	0.03756100	0.02345271	0.03898629
1.50	0.661470	0.0661470	0.03385300	0.02239274	0.04375426
1.60	0.696700	0.0696700	0.03033000	0.02113091	0.04853909
1.70	0.729930	0.0729930	0.02700700	0.01971322	0.05327978
1.80	0.761060	0.0761060	0.02389400	0.01818477	0.05792123
1.90	0.790000	0.0790000	0.02100000	0.01659000	0.06241000
2.00	0.816690	0.1225035	0.02749650	0.02245612	0.10004738
2.20	0.863300	0.1726600	0.02734000	0.02360262	0.14905738
2.40	0.901070	0.1802140	0.01978600	0.01782857	0.16238543
2.60	0.930600	0.1861200	0.01388000	0.01291673	0.17320327
2.80	0.952880	0.1905760	0.00942400	0.00897994	0.18159606
3.00	0.969050	0.1938100	0.00619000	0.00599842	0.18781158
3.20	0.980370	0.1960740	0.00392600	0.00384893	0.19222507
3.40	0.987970	0.1975940	0.00240600	0.00237706	0.19521694
3.60	0.992890	0.1985780	0.00142200	0.00141189	0.19716611
3.80	0.995940	0.1991880	0.00081200	0.00080870	0.19837930
4.00	0.997770	0.1995540	0.00044600	0.00044501	0.19910899
4.20	0.998820	0.1997640	0.00023600	0.00023572	0.19952828
4.40	0.999400	0.1998800	0.00012000	0.00011993	0.19976007
4.60	0.999700	0.1999400	0.00006000	0.00005998	0.19988002
4.80	0.999860	0.1999720	0.00002800	0.00002800	0.19994400
5.00	0.999940	0.1999880	0.00001200	0.00001200	0.19997600
5.20	0.999971	0.1999942	0.00000580	0.00000580	0.19998840
5.40	0.999988	0.1999976	0.00000240	0.00000240	0.19999520
5.60	0.999995	0.1999990	0.00000100	0.00000100	0.19999800
5.80	0.999998	0.1999996	0.00000040	0.00000040	0.19999920
6.00	0.999999	0.0999999	0.00000010	0.00000010	0.09999980
			Displ. Thick.	Mom. Thick.	
Totale	4.7830928		1.1669072	0.4700010	4.3130918
Valore	numerico		1.1669072	0.4700010	
Valore	analitico		1.2167800	0.4701282	
Differenza	assoluta		0.0498728	-0.0001272	
Differenza	percentuale		4.0987524	0.0270565	

FIG. 3. Tabella di riferimento per il calcolo numerico di displacement thickness δ^* e momentum thickness $\hat{\delta}$ ottenuta integrando $f''' + f f'' = 0$.

3. Analogamente a quanto fatto per δ^* , si ricava:

$$\hat{\delta} = \delta(x) \int_0^6 f'(1 - f')d\eta =$$

$$= \delta(x) \left[\int_0^6 f' d\eta - \int_0^6 (f')^2 d\eta \right] =$$

$$= \delta(x) \left[f|_0^6 - \int_0^6 (f')^2 d\eta \right]$$

In questo caso l'integrale viene risolto numericamente: si trova $\hat{\delta} \simeq 0,47 \delta(x)$.

Poiché $\delta(x) \cdot U_\infty/\nu = \sqrt{Re}$, disegniamoc l'andamento delle quantità $\delta^* U_\infty/\nu$ e $\hat{\delta} U_\infty/\nu$ in funzione di Re .

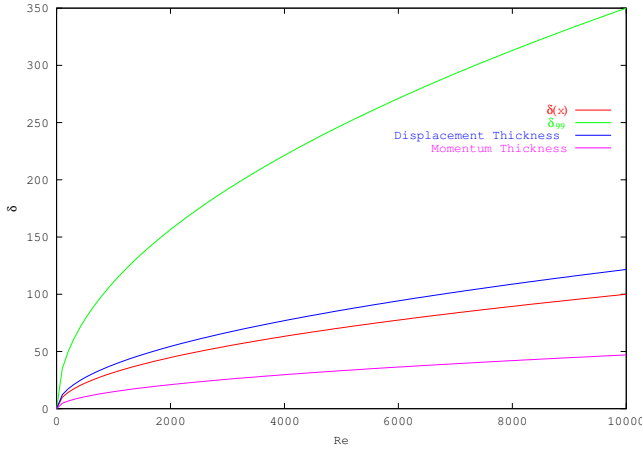


FIG. 4. Andamento degli spessori $\delta_{99} U_\infty/\nu$, $\delta^* U_\infty/\nu$ e $\hat{\delta} U_\infty/\nu$ in funzione di η .

NOTA BENE

Integrando $f''' + ff'' = 0$ si ottiene:

- $\delta_{99} \simeq 3.5\sqrt{Re}$,
- $\delta^* \simeq 1.217\delta(x)$ (con valore analitico),
- $\delta^* \simeq 1.167\delta(x)$ (con valore numerico),
- $\hat{\delta} \simeq 0.47\delta(x)$,

con $\delta(x) = \sqrt{\frac{2\nu x}{U_\infty}}$.

Integrando $2f''' + ff'' = 0$ si ottiene:

- $\delta_{99} \simeq 4.95\sqrt{Re}$,
- $\delta^* \simeq 1.721\delta(x)$ (con valore analitico),
- $\delta^* \simeq 1.65\delta(x)$ (con valore numerico),
- $\hat{\delta} \simeq 0.66\delta(x)$,

con $\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$.

Ovviamente c'è un fattore $\sqrt{2}$ fra i valori numerici nei due casi. Per completezza, viene di seguito riportata la tabella di riferimento per il calcolo numerico di displacement thickness δ^* e momentum thickness $\hat{\delta}$ ottenuta integrando $2f''' + ff'' = 0$.

η	$f[\eta]$	$f'[\eta]$	$f''[\eta]$
0.00	0.0000	0.0000	0.3321
0.25	0.0104	0.0830	0.3319
0.50	0.0415	0.1659	0.3309
0.75	0.0933	0.2483	0.3282
1.00	0.1656	0.3298	0.3230
1.25	0.2580	0.4096	0.3146
1.50	0.3701	0.4868	0.3026
1.75	0.5011	0.5605	0.2866
2.00	0.6500	0.6298	0.2668
2.25	0.8156	0.6936	0.2434
2.50	0.9963	0.7513	0.2174
2.75	1.1906	0.8022	0.1897
3.00	1.3968	0.8460	0.1614
3.25	1.6131	0.8829	0.1337
3.50	1.8377	0.9130	0.1078
3.75	2.0691	0.9370	0.0844
4.00	2.3057	0.9555	0.0642
4.25	2.5464	0.9694	0.0474
4.50	2.7901	0.9795	0.0340
4.75	3.0360	0.9867	0.0236
5.00	3.2833	0.9915	0.0159
5.25	3.5316	0.9948	0.0104
5.50	3.7806	0.9969	0.0066
5.75	4.0300	0.9982	0.0040
6.00	4.2796	0.9990	0.0024
6.25	4.5294	0.9994	0.0014
6.50	4.7793	0.9997	0.0008
6.75	5.0293	0.9998	0.0004
7.00	5.2792	0.9999	0.0002
7.25	5.5292	1.0000	0.0001
7.50	5.7792	1.0000	0.0001
7.75	6.0292	1.0000	0.0000
8.00	6.2792	1.0000	0.0000

FIG. 5. Tabella di riferimento per il calcolo numerico di displacement thickness δ^* e momentum thickness $\hat{\delta}$ (ottenuta integrando $2f''' + ff'' = 0$).