# SPETTRI DELLA TURBOLENZA

Definite le scale della turbolenza ed il concetto di cascata di energia, dobbiamo ora capire come questa energia sia distribuita tra i vari vortici alle varie scale.

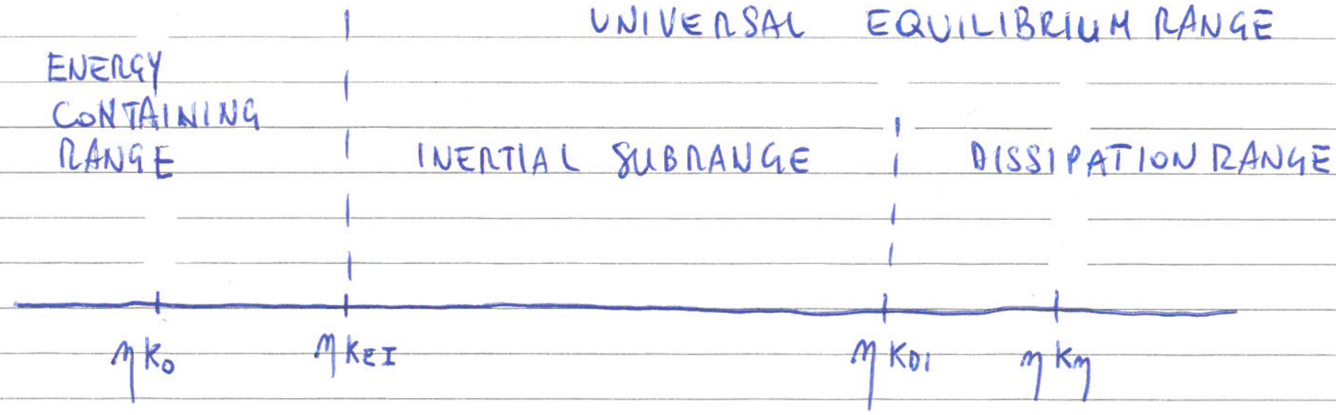
Per fare questo introduciamo il concetto di "energy spectrum".

Innanzitutto è possibile definire per ogni lunghezza il corrispondente numero d'onda (wavenumber) $k = \frac{2\pi}{l}$

I vari range di lunghezze caratteristiche possono essere rappresentati in termini di numeri d'onda ed adimensionalizzati rispetto alla Kolmogorov microscale $\eta$.

$$k_0 = \frac{2\pi}{l_0} \Rightarrow \eta k_0 = \frac{2\pi\eta}{l_0}$$

Percui, in termini di numero d'onda, lo spettro può essere rappresentato come



Pertanto, se definiamo $E(k)$ lo spettro dell'energia cinetica turbolenta $k$, per definizione risulta che

$$k = \int_0^\infty E(k)\, dk$$

ossia $k$ è l'integrale dello spettro su tutti i numeri d'onda.

Analogamente, l'energia cinetica turbolenta contenuta all'interno di un range di vortici di grandezza $l_A$ ed $l_B$, sarà:

$$k_{(k_A, k_B)} = \int_{k_A}^{k_B} E(k)\, dk$$

Per un fluido newtoniano, si può dimostrare che la dissipazione dell'energia cinetica turbolenta, in forma spettrale può essere scritta come

$$\varepsilon = 2\nu \int_0^\infty k^2 E(k)\, dk$$

da cui si vede che la dissipazione avviene agli alti numeri d'onda, ossia piccole $l$, ossia vortici piccoli.

Applicando la teoria di Kolmogorov e l'analisi dimensionale, è possibile derivare un'equazione per lo spettro di energia $E(k)$ nell' inertial subrange. Infatti, in base alla terza ipotesi di Kolmogorov, $E(k)$ dipende solamente da $\varepsilon$

Pertanto:

$$k = [m^2 s^{-2}] \quad \text{turbulent kinetic energy}$$

$$\varepsilon = [m^2 s^{-3}] \quad \text{dissipation}$$

$$k = [m^{-1}] \quad \text{wavenumber}$$

$$E(k) = \frac{k}{k} = [m^3 s^{-2}]$$

Pertanto:

$$E(k) \propto \varepsilon^{\alpha} k^{\beta} \Rightarrow \left[\frac{m^3}{s^2}\right] = \left[\frac{m^2}{s^3}\right]^{\alpha} \left[\frac{1}{m}\right]^{\beta}$$

sistemiamo prima la scala temporale:

$$[s^2] = [s^{3\alpha}] \Rightarrow 2 = 3\alpha \Rightarrow \alpha = 2/3$$

poi la scala delle lunghezze:

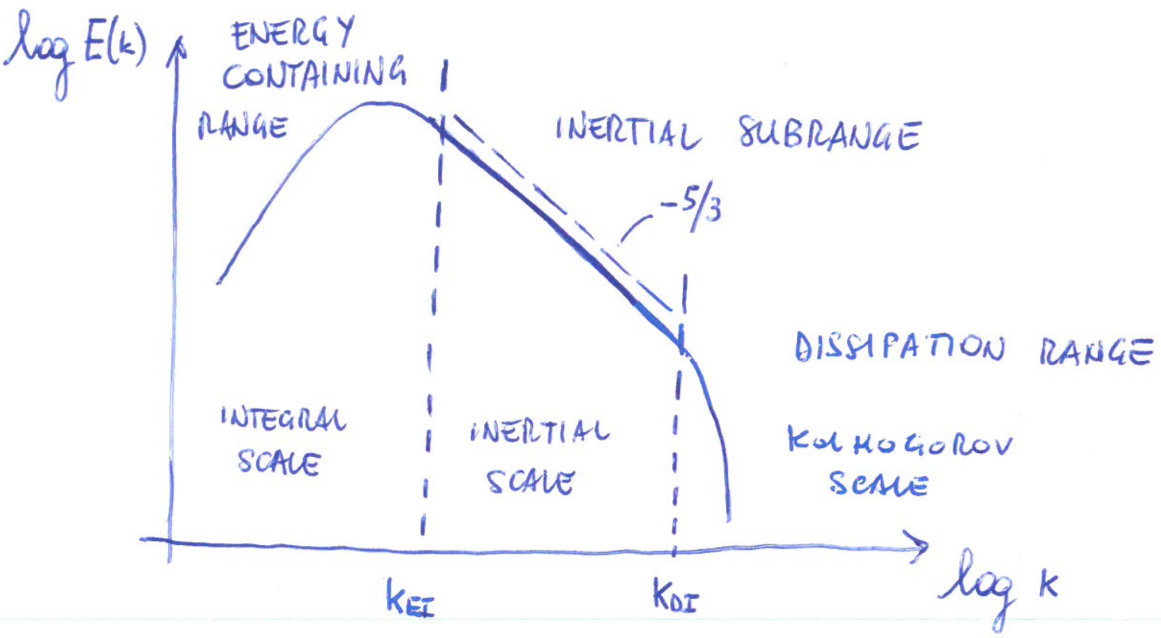
$$[m^3] = [m^2]^{\frac{2}{3}} [m]^{-\beta} \Rightarrow 3 = \frac{4}{3} - \beta \Rightarrow 9 = 4 - 3\beta$$

$$\Rightarrow \beta = -5/3$$

Pertanto:

$$E(k) \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

$$\boxed{E(k) = C_k \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}}$$ KOLMOGOROV $-5/3$ SPECTRUM




$C_k = 1.5$ è la costante di Kolmogorov che è stata determinata sperimentalmente.

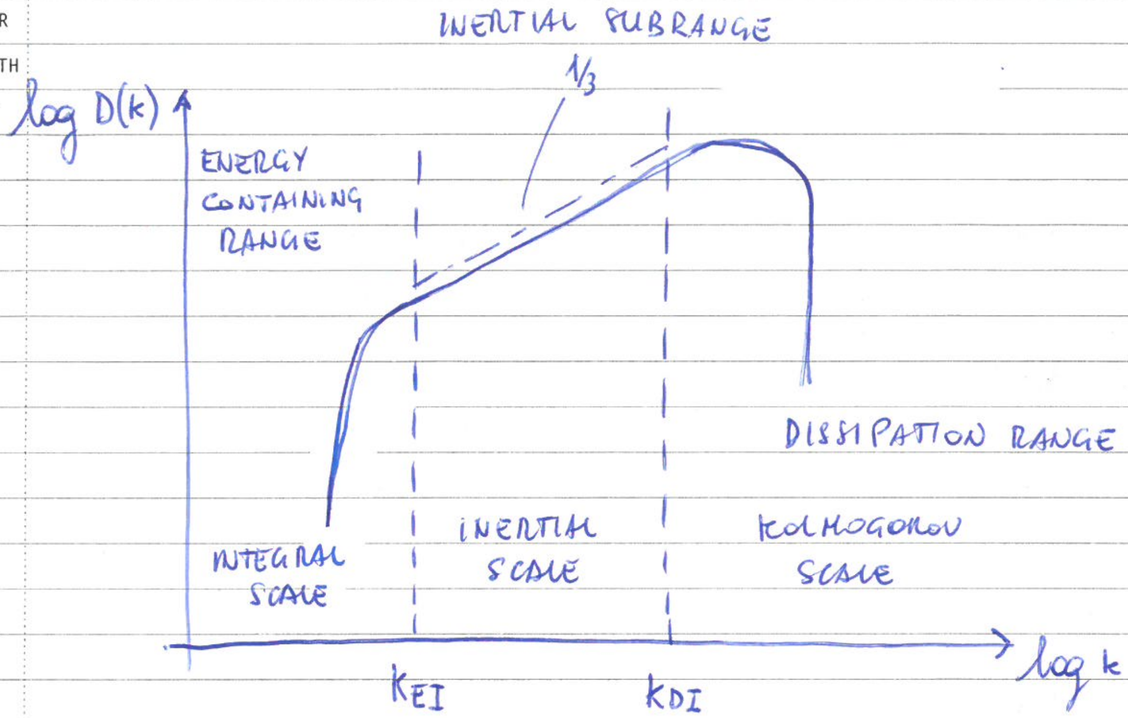
Analogamente, se definiamo

$$D(k) = 2\nu k^2 E(k)$$

lo spettro della dissipazione, sempre per l'inertial subrange otteniamo

$$\boxed{D(k) = 2\nu C_k \varepsilon^{2/3} k^{1/3}}$$

YEAR
MONTH
DAY




## OSSERVAZIONI

1) ↑ Re lo spettro si amplia in quanto ci sono più vortici piccoli

2) ↑ Re, la parte di spettro relativa alle strutture di larga scala non cambia