YEAR
MONTH
DAY

SCALE DELLA TURBOLENZA

Il moto turbolento avviene su varie scale di grandezza. Le scale di grandezza diventano via via più piccole al crescere del Re.

I fenomeni associati al trasferimento di TKE ed all'anisotropia della turbolenza sono distribuiti su tutte le scale della turbolenza → ENERGY CASCADE (Richardson, 1922)

Il concetto della "cascata di energia" postula che l'energia cinetica associata al moto turbolento si formi alle grandi scale di moto (grandi moti vorticosi) e sia trasferita man mano alle strutture sempre più piccole, fino ad essere completamente dissipata per azione viscosa.

Partendo da questo concetto, Kolmogorov (1941) ha sviluppato delle ipotesi che ci consentono di quantificare le più piccole strutture della turbolenza (ossia quelle alle quali avviene la dissipazione viscosa dell'energia cinetica) → KOLMOGOROV SCALES

Consideriamo un flusso completamente turbolento caratterizzato da

$$Re = \frac{\mathcal{U} \mathcal{L}}{\nu}$$

$\mathcal{U}$ ≡ velocità caratteristica

$\mathcal{L}$ ≡ grandezza caratteristica

Adesso facciamo un'osservazione: possiamo immaginare la turbolenza come composta da tanti vortici di grandezze differenti → ciascuno di questi vortici sarà caratterizzato dall'avere una grandezza caratteristica l, alla quale sarà associata una velocità caratteristica $u(l)$.

A ciascun vortice, possiamo associare un tempo (scala temporale) caratteristico, definito come $\tau(l) = l/u(l)$.

l ≡ caratteristica

Immaginiamo quindi che una "regione" occupata da un vortice grande possa contenere anche vortici più piccoli.

I vortici di grande scala, avranno una lunghezza caratteristica l_0 dello stesso ordine di grandezza di $\mathcal{L}$, e la loro velocità caratteristica $u_0 \doteq u(l_0)$ sarà dello stesso ordine di grandezza di $\mathcal{U}$.

Pertanto il loro $Re_0 = \frac{u_0 l_0}{\nu}$ sarà comparabile con il Re del flusso.

YEAR
MONTH
DAY

Ora, possiamo osservare (filmato di brake-up) che i vortici grandi sono instabili e tendono a "rompersi" in strutture vorticose più piccole, trasferendo loro energia. A loro volta questi nuovi vortici, subiranno un processo simile per cui tenderanno a formare vortici di sempre più piccole dimensioni, e questo avverrà fino a quando il $Re(\ell) = \frac{u(\ell)\ell}{\nu}$ del "vorticino" sarà sufficientemente piccolo $\Rightarrow$ il vortice è stabile e la dissipazione di energia cinetica avviene attraverso la dissipazione viscosa [ENERGY CASCADE - Richardson].

L'energia cinetica associata ai vortici grandi sarà dell'ordine di grandezza u_0^2, e la scala temporale di questi grandi vortici sarà $\tau_0 = l_0/u_0$.

Per cui il tasso di trasferimento di energia, ossia l'energia cinetica trasferita nell'unità di tempo, può essere definito come

$$\frac{u_0^2}{\tau_0} \equiv \frac{u_0^3}{l_0} \propto \varepsilon \qquad \varepsilon \equiv \text{rate of dissipation of TKE}$$

Ma a quale scala di turbolenta ℓ avviene la dissipazione viscosa?
In particolare: se $\ell \downarrow$, cosa succede a $u(\ell)$ e $\tau(\ell)$? $\uparrow$, $\downarrow$ o rimangono invariati?

Kolmogorov ha risposto a queste domande, formulando una teoria basata su tre ipotesi

1^A IPOTESI DI KOLMOGOROV $\rightarrow$ ad elevati numeri di Re, le scale più piccole della turbolenta ($\ell \ll \ell_0$) sono statisticamente isotropiche $\Rightarrow$ $\exists$ una grandezza caratteristica ℓ_{EI} tale per cui se $\ell < \ell_{EI}$ i vortici possono essere considerati isotropici

2^A IPOTESI DI KOLMOGOROV $\rightarrow$ ad un Re sufficientemente elevato, le statistiche del moto di piccola scala ($\ell < \ell_{EI}$), sono governate unicamente da viscosità ν e dalla dissipazione ε $\Rightarrow$ $\exists$ η KOLMOGOROV LENGHT SCALE

3^A IPOTESI DI KOLMOGOROV $\rightarrow$ ad un Re sufficientemente elevato, le statistiche del moto per scale $\eta \leq \ell \leq \ell_0$, sono governate unicamente dalla dissipazione ε, indipendentemente dalla viscosità ν.

$$\boxed{l_{EI} \approx \frac{1}{6} l_0}$$

Con il trasferimento di energia verso scale sempre inferiori, anche le altre informazioni riguardanti i vortici di large scala (flusso medio & condizioni al contorno) vengono perdute $\Rightarrow$ le statistiche delle strutture di piccola scala sono "universali", ossia simili in ogni flusso turbolento ad elevato Re.

Per $l < l_{EI}$, i due processi che governano le strutture sono il tasso di trasferimento di energia $\mathcal{T}_{EI}$ (= energy transfer rate) e la dissipazione viscosa ε, ossia dalla viscosità cinematica ν.

$l < l_{EI}$ è definito UNIVERSAL EQUILIBRIUM RANGE.

$$\frac{l}{u(l)} \ll \frac{l_0}{u_0} \Rightarrow$$ scala temporale molto piccola significa che le strutture si adattano molto più velocemente al cambiamento, ossia mantenere l'equilibrio dinamico con $\mathcal{T}_{EI}$ imposto dalle strutture di larga scala.

Pertanto, dati i due parametri ε e ν è possibile definire univocamente le seguenti scale:

$$\left.\begin{array}{lll} \eta \equiv \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} & \text{lunghezza} \\ u_\eta \equiv (\varepsilon \nu)^{1/4} & \text{velocità} \\ \tau_\eta \equiv \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} & \text{tempo} \end{array}\right\} \text{KOLMOGOROV SCALES}$$

Per le scale di Kolmogorov, $Re = \frac{\eta u_\eta}{\nu} \equiv 1 \Rightarrow$ alle piccole scale il numero di Re è sufficientemente piccolo perciò si ha dissipazione viscosa.

Inoltre:

$$\varepsilon = \nu \left(\frac{u_\eta}{\eta}\right)^2 = \frac{\nu}{\tau_\eta^2}$$

ossia $\left(\frac{u_\eta}{\eta}\right) = 1/\tau_\eta$ è una caratterizzazione consistente del gradiente di velocità delle piccole scale dissipative.

Come sono in relazione le scale di Kolmogorov con le grandezze di larga scala l_0, u_0 e τ_0?

Vediamo il rapporto tra le lunghezze:

$$\frac{\eta}{l_0} = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \frac{1}{l_0} = \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4} l_0} \sim \frac{\nu^{3/4}}{\left(\frac{u_0^3}{l_0}\right)^{1/4} l_0} =$$

$$= \frac{\nu^{3/4} l_0^{3/4}}{u_0^{3/4}} = \left(\frac{\nu l_0}{u_0}\right)^{3/4} = Re_0^{-3/4}$$

Ossia

$$\eta/l_0 \sim Re_0^{-3/4}$$

Analogamente si può dimostrare che

$$u_\eta/u_0 \sim Re_0^{-1/4}$$

$Re_0 \simeq Re$

$$\tau_\eta/\tau_0 \sim Re_0^{-1/2}$$

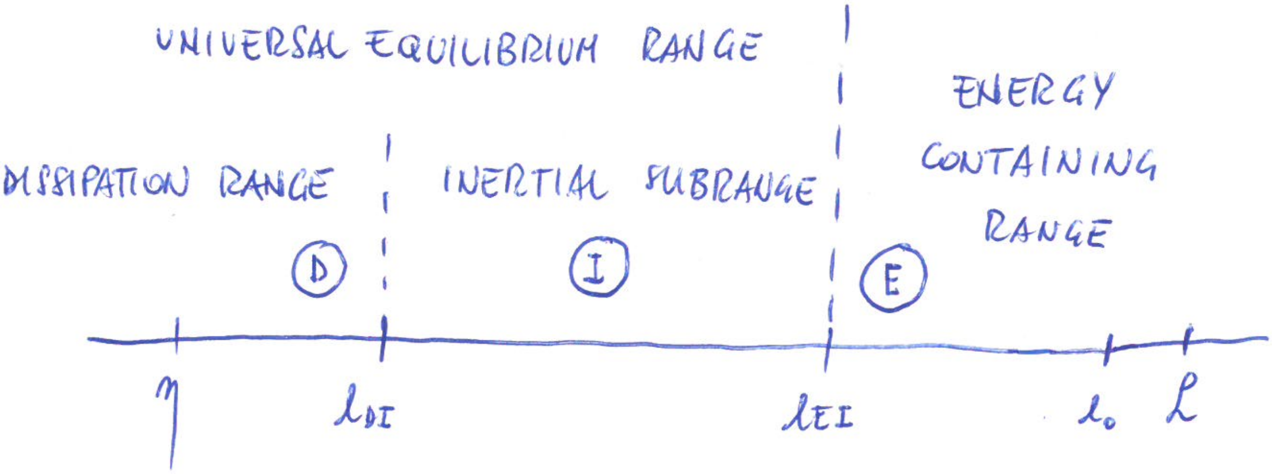
Pertanto essendo Re (per un flusso turbolento) un numero molto grande, risulta che le scale di Kolmogorov sono molto piccole rispetto a quelle di grande scala.

Tuttavia, esiste un intervallo di scale l $[l_0 \gg l \gg \eta]$, che sono molto piccole se paragonate a l_0 e molto grandi se paragonate a η. In questo intervallo, i vortici sono più grandi di quelli dissipativi, e quindi il loro moto è poco affetto dalla viscosità, ossia $Re_l = \frac{l\,u(l)}{\nu}$ è grande.

È pertanto utile definire una nuova lunghetta di riferimento l_{DI}, che divide l'UNIVERSAL EQUILIBRIUM RANGE $(l < l_{EI})$ in due porzioni:

$\ell_{DI} < \ell < \ell_{EI}$ $\rightarrow$ INERTIAL SUBRANGE

$\ell < \ell_{DI}$ $\rightarrow$ DISSIPATION RANGE



All' interno dell' inertial subrange, dato un vortice di dimensione ℓ, le sue grandezze caratteristiche saranno:

$$u(\ell) = (\varepsilon \ell)^{1/3} = \left(\frac{u_\eta^3}{\eta} \ell\right)^{1/3} = u_\eta \left(\frac{\ell}{\eta}\right)^{1/3} \sim u_0 \left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^{1/3}$$

$$\tau(\ell) = (\ell^2/\varepsilon)^{1/3} = \left(\ell^2 \frac{\eta}{u_\eta^3}\right)^{1/3} = \left(\ell^2 \frac{\eta^3}{u_\eta^3} \frac{1}{\eta^2}\right)^{1/3} =$$

$$= \tau_\eta \left(\frac{\ell}{\eta}\right)^{2/3} \sim \tau_0 \left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^{2/3}$$

Pertanto se $\ell \downarrow \Rightarrow u(\ell) \downarrow$ e $\tau(\ell) \downarrow \Rightarrow$ diminuiscono gli effetti inerziali man mano che i vortici rimpiccioliscono.

YEAR
MONTH
DAY

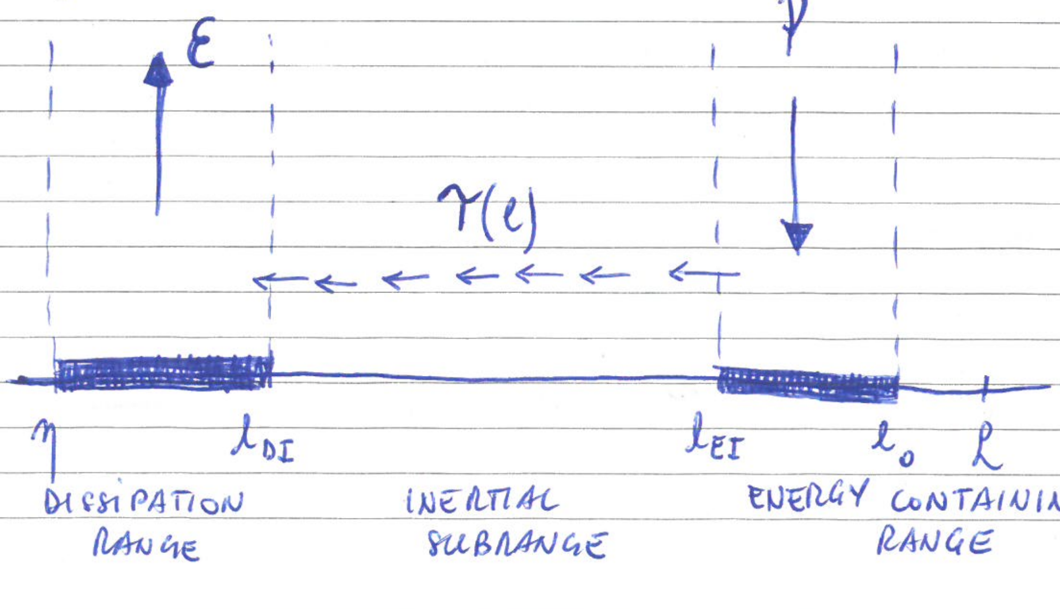
Nella concezione di "cascata di energia" il concetto fondamentale è il tasso con cui l'energia viene trasferita dai vortici più grandi di ℓ a quelli più piccoli di ℓ, ossia $\mathcal{T}(\ell)$.
All'interno dell'inertial subrange, possiamo scrivere:

$$\mathcal{T}(\ell) = \frac{u^2(\ell)}{\tau(\ell)} = \frac{(\varepsilon \ell)^{2/3}}{(\ell^2/\varepsilon)^{1/3}} = \frac{\varepsilon^{2/3} \cancel{\ell^{2/3}}}{\cancel{\ell^{2/3}}/\varepsilon^{1/3}} = \varepsilon$$

Percui abbiamo

$$\mathcal{T}_{EI} \equiv \mathcal{T}(\ell_{EI}) \equiv \mathcal{T}(\ell) \equiv \mathcal{T}(\ell_{DI}) = \mathcal{T}_{DI} = \varepsilon$$

ossia nell'inertial subrange il trasferimento di energia è costante ➡ l'energia che entra dalle strutture di larga scala viene trasferita integralmente alle strutture di piccola scala dissipative.



Un'altra scala di turbolenza importante da conoscere è λ, ossia la Taylor microscale, definita nel caso di turbolenza isotropica come

$$\lambda = \sqrt{\frac{u'^2}{\left(\partial u/\partial x\right)^2}}$$

Elaborando i termini del bilancio di conservazione dell'energia cinetica turbolenta, si può derivare che:

$$\begin{cases} \varepsilon = 15\nu \dfrac{u'^2}{\lambda^2} & \text{(ISOTROPIC TURBULENCE)} \\ k = \dfrac{1}{2}\left(u'^2 + v'^2 + w'^2\right) = \dfrac{3}{2} u'^2 & \text{(ISOTROPIC TURBULENCE)} \end{cases}$$

$$\lambda = \sqrt{10\nu \frac{k}{\varepsilon}}$$

la scala di Taylor si trova all'interno dell'inertial subrange, infatti:

$$\frac{\lambda}{l_0} = \frac{\left(10\nu\, k/\varepsilon\right)^{1/2}}{l_0} \sim \frac{\left(10\nu\, u_0^2 \frac{l_0}{u_0^3}\right)^{1/2}}{l_0} = \left(\frac{10\,\nu}{l_0 U_0}\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{10}\, Re_0^{-1/2}$$

$$\frac{\lambda}{\eta} = \frac{\lambda}{l_0}\frac{l_0}{\eta} \sim \sqrt{10}\, Re_0^{-1/2}\, Re_0^{3/4} = \sqrt{10}\, Re_0^{1/4}$$

Il numero di Reynolds associato a questa scala è definito come:

$$Re_\lambda = \frac{u'\lambda}{\nu}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}k\right)^{1/2}\sqrt{10}\, Re_0^{-1/2}\, l_0}{\nu} =$$

$$\sim \frac{\left(\frac{2}{3}u_0^2\right)^{1/2}\sqrt{10}\, Re_0^{-1/2}\, l_0}{\nu} =$$

$$= \sqrt{\frac{20}{3}}\,\frac{u_0 l_0}{\nu}\, Re_0^{-1/2} =$$

$$= \sqrt{\frac{20}{3}}\, Re_0\, Re_0^{-1/2} =$$

$$= \sqrt{\frac{20}{3}}\, Re_0^{1/2}$$

$Re_0 \simeq Re$

È inoltre possibile mettere in relazione i vortici dell'inertial subrange, aventi quindi λ come grandezza caratteristica, con la scala temporale di Kolmogorov.

Infatti:

$$\tau_\lambda = \frac{\lambda}{u'} = \left(\frac{15\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} =$$
$$= \sqrt{15}\,(\nu/\varepsilon)^{1/2} = \sqrt{15}\;\tau_\eta$$

$\boxed{\text{CONCLUDENDO}}$ Qual'è la scala dinamica totale spazio-temporale di un evento turbolento? Questa informazione è di fondamentale importanza per capire la differenza tra vari approcci numerici nella soluzione dei problemi di turbolenza.

Per essere in grado di seguire l'evoluzione spazio-temporale di una struttura di larga scala dalla sua "nascita" alla sua "morte" (dissipazione viscosa), dobbiamo considerare il seguente dominio

$$\left(\frac{l_0}{\eta}\right)^3 \times \left(\frac{\tau_0}{\tau_\eta}\right) \sim Re^{9/4}\, Re^{1/2} = Re^{11/4}$$