28/10/04 1

Trasporto di Energia in Flusso Laminare

Poiseuille

Eq. N-S $\qquad \rho\left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}$

L'eq. si riduce a:

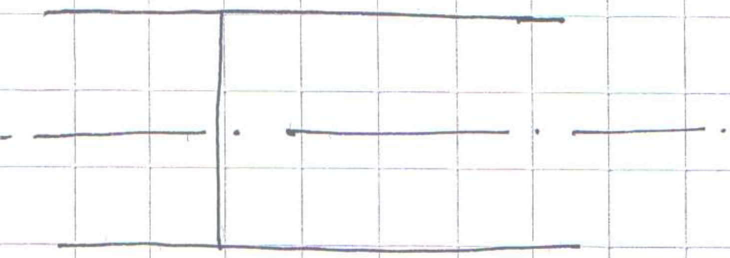
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy}$$

Bilancio fra le forze di pressione e le forze di taglio.

~~Ese~~. Su un volume finito di canale di larghezza $W \gg h$ e lunghezza $L \gg h$

$$\cancel{2W}\cdot h \quad P(L) - P(0) = \tau_w \cdot \cancel{2W}L$$

$$P(L) - P(0) = \tau_w \cdot \frac{L}{h} \qquad \left[\text{con } \tau_w \text{ incognito}\right]$$



X/S

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dy}\tau_{xy}$$

moltiplicando scalarmente per u si ottiene l'eq. dell' Energia:

$$0 = -u\frac{dp}{dx} + \mu u \frac{d^2u}{dy^2} = -u\frac{dp}{dx} + u\frac{d}{dy}\left[\tau_{xy}\right]$$

$$0 = -\frac{d(pu)}{dx} + \underbrace{\frac{d}{dy}\left[\tau u\right] - \mu\left[\frac{du}{dy}\right]^2}$$

non dipende da x

perché $\frac{d}{dy}\left[\mu\frac{du}{dy}\,u\right] =$

$$= \mu\frac{d^2u}{dy^2}\,u + \mu\frac{du}{dy}\frac{du}{dy}$$

da cui $u\,\frac{d}{dy}\left[\tau\right] = u\,\frac{d}{dy}\left[\mu\frac{du}{dy}\right] = u\,\mu\frac{d^2u}{dy^2} =$

$\Rightarrow$

Per cui:

$$\boxed{\underset{(1)}{\frac{d(pu)}{dx}} = \underset{(2)}{\frac{d}{dy}\left[\tau u\right]} - \underset{(3)}{\mu\left[\frac{du}{dy}\right]^2}}$$

1. Lavoro fatto dalle forze di pressione per unità di volume e di tempo.

2. Lavoro fatto dalle forze viscose

3. Dissipazione viscosa.

~~Osserv. Integrazione~~ Esame dei vari termini.

• Il profilo della $u(y)$ è:

$$u(y) = \frac{3}{2}\,\overline{u}\left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right]$$

$$\overline{u} = Q/A = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} u\,dy$$

• Lo sforzo di taglio è: $\boxed{\tau = \mu \frac{du}{dy} = -\frac{3\mu\overline{u}}{h^2}\,y}$

• La pressione (il suo gradiente) $\boxed{\frac{dp}{dx} = \frac{d\tau}{dy} = -\frac{3\mu\overline{u}}{h^2}}$

Sostituendo nell' eq. dell'energia cinetica.

1 $$\frac{d(pu)}{dx} = u\frac{dp}{dx} =$$

$$= \frac{3}{2}\bar{u}\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]\cdot\left(-3\mu\frac{\bar{u}}{h^2}\right) =$$

$$= -\frac{9}{2}\mu\frac{\bar{u}^2}{h^2}\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]$$

2 $$\frac{d}{dy}(\tau u) = \frac{d}{dy}\left[-3\mu\frac{\bar{u}y}{h^2}\cdot\frac{3}{2}\bar{u}\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]\right] =$$

$$= \frac{d}{dy}\left[-\frac{9}{2}\mu\frac{\bar{u}^2}{h^2}\left(y-\frac{y^3}{h^2}\right)\right] =$$

$$= -\frac{9}{2}\mu\frac{\bar{u}^2}{h^2}\left[1-3\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]$$

3 $$-\mu\left(\frac{du}{dy}\right)^2 = -\mu\left[-\frac{3\bar{u}}{h^2}y\right]^2 = 9\mu\frac{\bar{u}^2}{h^4}y^2$$

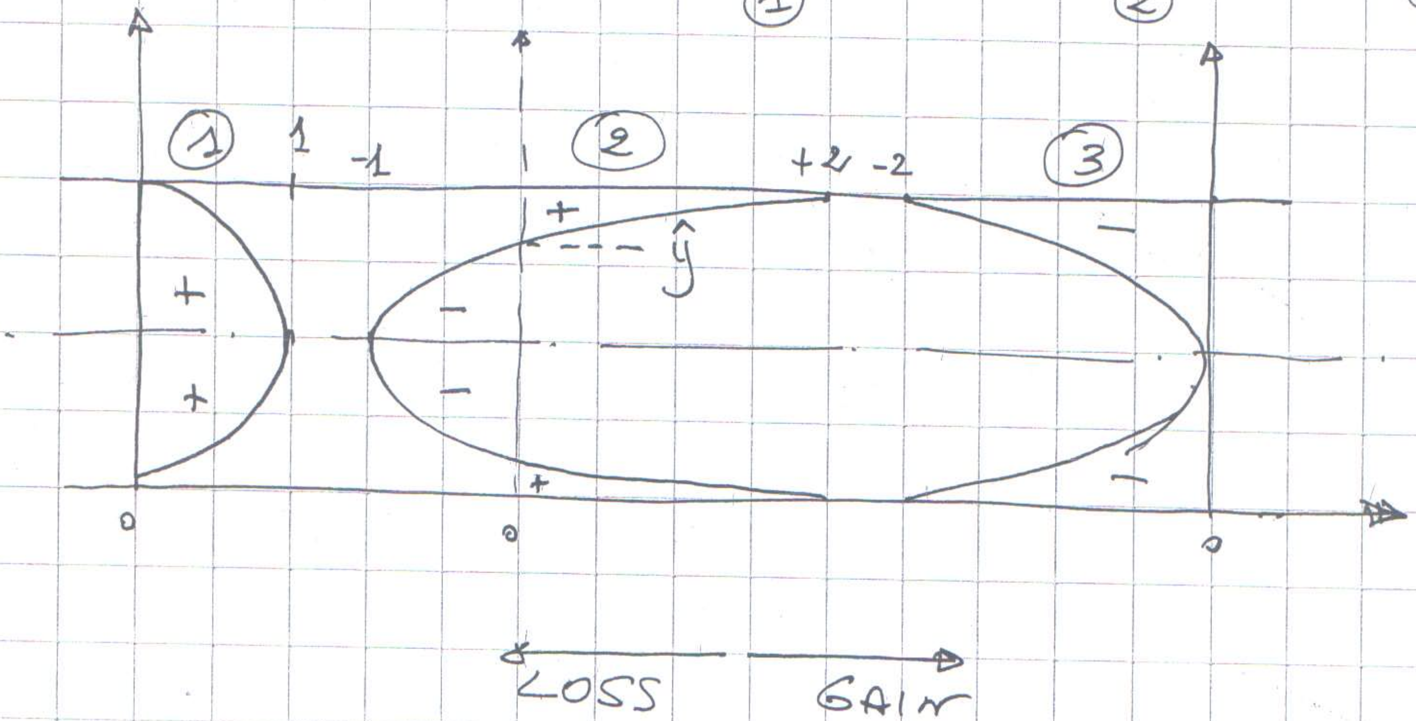
Per cui:

$$-\frac{9}{2}\mu\frac{\bar{u}^2}{h^2}\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right] =$$

$$= -\frac{9}{2}\mu\frac{\bar{u}^2}{h^2}\left[1-3\left(\frac{y}{h}\right)^2\right] + 9\mu\frac{\bar{u}^2}{h^2}y^2$$

Da cui

$$0 = -\frac{9}{2}\mu\frac{\bar{u}}{h^2}^2\left\{\underbrace{\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]}_{1} - \underbrace{\left[1-3\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]}_{2} + \underbrace{2\left(\frac{y}{h}\right)^2}_{3}\right\}$$



1 Sempre positivo

2 Sempre negativo

2 Positivo/Negativo

$$\hat{y} = \frac{h}{\sqrt{3}} \cong 0{,}52\,h$$

è il punto dove $u(y) = \bar{u}$!

$$\int_{-h}^{h} (1)\,dy = \int_{-h}^{h} (3)\,dy \qquad \int_{-h}^{h} (2)\,dy = 0\ !$$

Il lavoro compiuto dalle forze Tangenziali è complessivamente [illegible] zero:

1) per $y < \hat{y}$, c'è nella zona centrale del canale, le particelle subiscono una decelerazione globale rispetto alla velocità media. Il lavoro fatto dalle forze di pressione che è servito ad accelerare le particelle viene ceduto al fluido circostante per accelerarlo

2) per $y > \hat{y}$, c'è vicino alla parete, le particelle di fluido subiscono una accelerazione globale rispetto alla velocità media.