LEZIONE UNO

Introduzione: Richiami delle equazioni fondamentali

Considerato un volume di fluido ΔV, corrispondente a una massa Δm racchiuso da una superficie ΔS, le equazioni fondamentali della fluidodinamica si ottengono applicando il principio di conservazione per la generica grandezza Γ

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \dot{\Gamma}_{in} - \dot{\Gamma}_{out}$$

1 - Conservazione della massa $(\Gamma = m)$

$$\boxed{1} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0 \qquad \rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$$

con $\bar{u} = \bar{u}(x, y, z, t)$; $\rho = \rho(x, y, z, t)$

Definendo la derivata Lagrangiana, $\frac{\partial \cdot}{\partial t} + u_x \frac{\partial \cdot}{\partial x} + u_y \frac{\partial \cdot}{\partial y} + u_z \frac{\partial \cdot}{\partial z} = \frac{D \cdot}{D t}$

l'eq. di conservazione della massa [1] può essere scritta come:

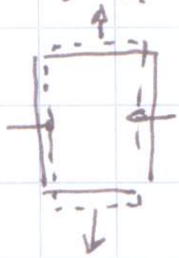
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial u_y}{\partial y} + \rho \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \bar{u} = 0$$

se il fluido è incomprimibile $\rho = cost$; inc.

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow div\, \bar{u} = \nabla \cdot \bar{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Equazione di continuità



$\bar{F} = m \bar{a}$

2 Equazione della conservazione della q. di moto.

... Appunti fluidodinamica. Per un fluido Newtoniano e incomprimibile ($\rho = cost$; $\mu = cost$)

$$i = 1,3 \quad \rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

con $P = p + \rho g h$

$$\rho \frac{D \bar{u}}{D t} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \bar{u}$$

$$\rho \frac{D u_i}{D t} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

Significato fisico dei Termini di N-S.

- $\rho \frac{\partial u_i}{\partial t}$ ≡ Termine di accumulo di q. di m. (inerziale)
- $\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ≡ Termine convettivo " (inerziale)
- $\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$ ≡ Termine diffusivo " (viscoso)

$\boxed{\text{N.B.}}$

$\frac{D\bar{u}}{Dt}$ è un'accelerazione. Le eq. di N-S descrivono il moto di una particella (volume) fluida esprimendo l'accelerazione delle particelle di fluido come risultato di variazioni di pressione e di forze viscose dissipative agenti all'interno del fluido.

L'accelerazione Lagrangiana $\frac{D\bar{u}}{Dt}$ ha una componente non stazionaria $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right)$ e una componente convettiva (~~$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$~~ $u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$) che rende l'equazione non lineare.

Nota. [Bird p. 226]. Derivata Lagrangiana di un campo vettoriale.

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u}\cdot\bar{\nabla})\bar{u} = \sum_i \bar{\delta}_i \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\bar{u}\cdot\bar{\nabla})u_i\right]$$

meglio: $(\bar{u}\cdot\bar{\nabla})\bar{u} = \frac{1}{2}\bar{\nabla}(\bar{u}\cdot\bar{u}) - \left[\bar{u}\times(\bar{\nabla}\times\bar{u})\right]$

Il Termine diffusivo è determinato sia dalla presenza di variazioni spaziali del gradiente di velocità sia anche dalla viscosità dinamica del fluido.

$[\mu] = Pa \cdot s$ La viscosità dinamica misura la resistenza allo scorrimento di un fluido sottoposto a sforzo di Taglio.

$\nu = \mu/\rho$

	aria	acqua
ρ	1,3	10^3
μ	$2 \cdot 10^{-5}$	10^{-3}
ν	$1{,}57 \cdot 10^{-5}$	10^{-6}

3. Conservazione dell'Energia - $\Gamma = E_{TOT}$

$$\rho C_p \underbrace{\left[\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i}\right]}_{\frac{DT}{Dt}} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}\right)$$

$\frac{J}{Kg\,K}$ $[C_p]$ = calore specifico presente a volume costante (?)

$\frac{W}{m\,K}$ $[\lambda]$ = conducibilità Termica

$$\Rightarrow \quad \rho C_p \frac{DT}{Dt} = \lambda \nabla^2 T$$

Adimensionalizare

$$\tilde{x} = x / x_{ref}$$

Notă: $t_{ref} \simeq \dfrac{L_{ref}}{U_{ref}}$

$p_{ref} \simeq \rho U_{ref}^2$

- Continuitate

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_i} = 0$$

- Navier-Stokes

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \Rightarrow St \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j^2}$$

- Energie.

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \Rightarrow St \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{1}{Re\, Pr} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_i^2}$$

- St = STROUHAL = $\dfrac{L_{ref}}{U_{ref}} \cdot \dfrac{1}{t_{ref}} \overset{*}{=} 1$
- Re = Reynolds = $\rho \dfrac{U_{ref} L_{ref}}{\mu} = \dfrac{U_{ref} L_{ref}}{\nu}$
- Pr = PRANDTL = $\dfrac{\mu C_p}{\lambda}$

6

$$\cdot\ Re = \frac{\text{F. Inerzie}}{\text{F. viscose}} \approx \frac{\overbrace{\rho U^2}^{\propto}\ \overbrace{L^2}^{A}}{\underbrace{\mu \frac{U}{L}}_{\propto \tau}\ \underbrace{L^2}_{\propto A}}$$

$$\cdot\ Pr = \frac{\text{Diffusione di p.d.m}}{\text{" Termica}}$$

$$\cdot\ \frac{1}{Re\,Pr} = \frac{\text{Trasporto di calore per Conduzione}}{\text{" " Convezione}}$$

$$Re.Pr = \rho \frac{UL}{\mu} \frac{\cancel{\mu}\, C_p}{\lambda} = \rho C_p \frac{U\,L}{\lambda} = \frac{h\,.\,L}{\lambda} = Nu$$

Modelli matematici semplificati
Abbiamo già visto le equazioni per fluido Newtoniano e incomprimibile. Se le proprietà fisiche variano (ρ e μ, ad es.) le proprietà stesse si trovano all'interno degli operatori differenziali.

A. Fluido non viscoso (EULERO) $\boxed{\mu \simeq 0}$

Comprimibile

- $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \bar{u}) = 0$

Traccia del Tensore degli sforzi

- $\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \mathrm{div}(\rho u_i \bar{u}) = -\mathrm{div}(p \bar{i}_i) + \rho g_i$

$\boxed{Re \to \infty}$

B. Flusso Potenziale $\boxed{\mu = 0}$ e $\boxed{\mathrm{rot}\, \bar{u} = 0}$

Esiste quindi una funzione potenziale, φ, tale che
$\bar{u} = -\mathrm{grad}\, \varphi$

$$\text{Eq.} \Rightarrow \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, \varphi) = 0$$
$$\nabla^2 \varphi = 0$$

C. Creeping flow $\boxed{Re \to 0}$

Le eq. di N-S diventano lineari

$$0 = -\frac{1}{\rho}\mathrm{div}(p \bar{i}_i) + g_i + \mathrm{div}(\mu\, \mathrm{grad}\, \bar{u})$$

oppure, se $\mu = \mathrm{cost}$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}$$

D Boussinesq approximation

Se le variazioni di densità sono piccole (p.es. acqua) si può trascurare le variazioni di ρ nei termini convettivi, ~~...~~ e non in quello gravitazionale.
p.es. se la densità varia con la temperatura

$$(\rho - \rho_0) g_i = - \rho_0 g_i \beta (T - T_0)$$

β = coefficiente di dilatazione volumica.

E. Approssimazione dello strato limite.