LEZ.: EQUAZIONE DI TRASPORTO DELL'ENERGIA CINETICA TURBOLENTA

L'energia cinetica turbolenta è definita come:

$$(TKE \equiv)\ K \triangleq \frac{1}{2}\rho\,\overline{v_i' \cdot v_i'}$$

$$= \frac{1}{2}\rho \cdot \left[\overline{(v_x')^2 + (v_y')^2 + (v_z')^2}\right]$$

espressa per unità di volume e rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano.

In base a questa definizione, la TKE è pari alla traccia del tensore degli sforzi di Reynolds

$$K \triangleq \frac{1}{2}\rho \cdot Tr\left(\overline{v_i' \cdot v_j'}\right)$$

Questa relazione può essere sfruttata per ricavare l'equazione di trasporto della TKE, a partire dall'equazione di trasporto degli stress di Reynolds (e moltiplicando per 1/2).

L'equazione di trasporto della TKE ci interessa perché questa qtà misura l'intensità della turbolenza ed, in generale, è tempo-dipendente.

Senza dimostrazione, l'eq. di trasporto 3D degli stress di Reynolds è:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\overline{v_i' \cdot v_j'} \equiv \frac{D\left(\overline{v_i' \cdot v_j'}\right)}{Dt} =$$

$$= -\left(\overline{v_i' \cdot v_k'} \cdot \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_k} + \overline{v_j' \cdot v_k'} \cdot \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_k}\right)$$

TERMINE DI PRODUZIONE, P_{ij} (produzione di stress turbolento via interazione con "mean strain rate" $\partial \overline{v} / \partial x$)

$$+ \overline{\frac{p'}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial v_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\right)}$$

TERMINE DI PRESSURE STRAIN, ϕ_{ij} (ridistribuzione di energia dovuta alle fluttuaz. di pressione)

$$- \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial\left(\overline{p' \cdot v_j'}\right)}{\partial x_i} + \frac{\partial\left(\overline{p' \cdot v_i'}\right)}{\partial x_j}\right]$$

TERMINE DI TRASPORTO DOVUTO A FLUTTUAZIONI DI PRESSIONE, Π_{ij} (di solito trascurabile)

$$- \frac{\partial\left(\overline{v_i' \cdot v_j' \cdot v_k'}\right)}{\partial x_k}$$

TERMINE DI PSEUDO-DIFFUSIONE TURBOL. DEGLI STRESS DI REYNOLDS, T_{ij} (o di trasporto degli stress)

$$+ \nu \frac{\partial^2\left(\overline{v_i' \cdot v_j'}\right)}{\partial x_k^2}$$

TERMINE DI PSEUDO-DIFFUSIONE (detto anche di trasporto) MOLECOLARE, D_{ij}

$$- 2\nu \overline{\left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_j'}{\partial x_k}\right)}$$

TERMINE DI DISSIPAZIONE, ε_{ij} (dissipazione dovuta a fluttuazioni degli stress viscosi)

NOTA: In T_{ij}, $v_i' \cdot v_j' \cdot v_k'$ è il trasporto di $v_i' v_j'$ in direzione k oppure il trasporto di $v_i' v_k'$ in direzione j e così via...

Se si considera ora la traccia di questa equazione, allora si ottiene:

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{DK}{Dt} = \frac{1}{2}\,Tr\left[P_{ij}\right] + \frac{1}{2}\,Tr\left[\phi_{ij}\right] - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial C_{iij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu\,\frac{\partial\left(\overline{v_i'\cdot v_i'}\right)}{\partial x_j}\right] - \frac{1}{2}\,Tr\left[\varepsilon_{ij}\right]}$$

Con: $C_{iij} = \overline{v_i' v_i' v_j'} + \frac{1}{\rho}\overline{p'\cdot v_i'}\cdot\delta_{ij} + \frac{1}{\rho}\overline{p'\cdot v_i'}\cdot\delta$

essendo: $C_{ijk} \triangleq \overline{v_i'\cdot v_j'\cdot v_k'} + \frac{1}{\rho}\overline{p'\cdot v_i'}\cdot\delta_{jk} + \frac{1}{\rho}\overline{p'\cdot v_j'}\,\delta$

Inoltre, il termine D_{ij} e' stato riscritto come:

$$D_{ij}\Big|_{\substack{j\to i\\ k\to j}} = \nu\,\frac{\partial^2\left(\overline{v_i' v_j'}\right)}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu\,\frac{\partial\left(\overline{v_i'\cdot v_i'}\right)}{\partial x_j}\right]$$

dove $\overline{v_i'\cdot v_i'} = 2K/\rho$ dalla definizione di K.

Poiché $\frac{1}{2}\,Tr\left[\phi_{ij}\right] = \phi_{ii} = \frac{1}{2}\cdot\overline{\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i'}{\partial x_i}\right)} =$

$= \overline{\frac{p'}{\rho}\cdot\frac{\partial v_i'}{\partial x_i}}$ e $\frac{1}{2}C_{iij} = \frac{1}{2}\,\frac{K}{\rho}\cdot v_j' + \frac{1}{\rho}\,\overline{p'\cdot v_i'}\cdot\delta_{ii}$

si trova:

$$\frac{Dk}{Dt} = \underbrace{-\rho\,\overline{v_i' v_j'}\cdot\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j}}_{\frac{1}{2}Tr[P_{ij}]} \underbrace{- \mu\left(\overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}}\right)}_{\frac{1}{2}Tr[\varepsilon_{ij}]} +$$

$$+ \underbrace{\overline{p'\frac{\partial v_i'}{\partial x_i}}}_{\frac{1}{2}Tr[\phi_{ij}]} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\mu}{\rho}\cdot\frac{\partial k}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{k\cdot v_j'} + \overline{p' v_j'}\right)$$

$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\mu}{\rho}\cdot\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)$ uguale a $\mu\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\frac{1}{2}\overline{v_i'\cdot v_i'}\right)$

$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{k\cdot v_j'} + \overline{p' v_j'}\right)$ uguale a $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\rho\,\overline{v_i' v_i' v_j'} + \overline{p' v_j'}\right)$

Si ottiene:

$$\frac{Dk}{Dt} = \underbrace{-\rho\,\overline{v_i' v_j'}\cdot\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j}}_{\text{PRODUCTION OF TKE BY MEAN SHEAR RATE }(P_K)} \underbrace{- \mu\left(\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}\right)}_{\text{VISCOUS DISSIPATION RATE OF TKE }(\varepsilon_K)} + \underbrace{\overline{p'\cdot\frac{\partial v_i'}{\partial x_i}}}_{\text{PRESSURE STRAIN DIFFUSION}}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\mu\frac{\partial^2(\overline{v_i' v_i'})}{\partial x_j^2}}_{\text{MOLECULAR TRANSPORT OF TKE }(D_K)\text{: transport of TKE by viscous stresses}} \underbrace{- \frac{1}{2}\rho\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i' u_i' u_j'}\right)}_{\text{TURBULENT TRANSPORT OF TKE }(T_K)\text{: transport of TKE by Reynolds stresses}} \underbrace{- \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{p' v_j'}\right)}_{\text{PRESSURE DIFFUSION }(\Pi\text{: transport of TKE by pr}}$$

Questa equazione puo' anche essere ricavata a partire da NS e da RANS:

$$\text{NS} \quad \rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}$$

$$\text{RANS} \quad \rho\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j^2} - \rho \frac{\partial \overline{v_i' v_j'}}{\partial x_j}$$

Sottraendo la RANS a NS si ottiene un'equazione per $v_i' = v_i - \bar{v}_i$:

$$\rho\left(\frac{\partial v_i'}{\partial t} + \underbrace{v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}}\right) = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \mu \overbrace{\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j^2}\right)}^{\frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_j^2}}$$

$$\left[\cancel{\bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}} + v_j' \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \bar{v}_j \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} + v_j' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} - \cancel{\bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}}\right] + \rho \frac{\partial \overline{v_i' v_j'}}{\partial x_j}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_i'}{\partial t} + v_j' \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \bar{v}_j \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} + v_j' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_j^2} + \rho \frac{\partial \overline{v_i' v_j'}}{\partial x_j}$$

Moltiplichiamo ora per v_i':

$$\rho\left(v_i' \frac{\partial v_i'}{\partial t} + v_i' v_j' \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + v_i' \bar{v}_j \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} + v_i' v_j' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\right) = \rightarrow$$

$$= -\overline{v_i' \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \mu \overline{v_i' \frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_j^2}} + \rho \overline{v_i' \frac{\partial (v_i' v_j')}{\partial x_j}}$$

Ora: $$\overline{v_i' \cdot \frac{\partial v_i'}{\partial t}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{(v_i' \cdot v_i')}}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial t}$$

$$\overline{v_i' \cdot \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{(v_i' \cdot v_i')}}{\partial x_j} = \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (*)$$

Pertanto, applicando la media temporale ai vari termini

$$\rho\left(\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{v_i' v_j'} \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \bar{v}_j \cdot \underbrace{\overline{v_i' \cdot \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}}}_{(*)} + \overline{v_i' v_j' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}}\right) =$$

$$= -\overline{v_i' \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \mu \cdot \overline{v_i' \frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_j^2}} + \cancel{\rho\, \overline{v_i' \cdot \frac{\partial (v_i' v_j')}{\partial x_j}}} \to = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_j \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j}\right) = \underbrace{-\rho\, \overline{v_i' v_j'} \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}}_{P_k} - \rho\, \overline{v_i' v_j' \cdot \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}}$$

$$\underbrace{- \frac{\partial \overline{(p' \cdot v_i')}}{\partial x_i}}_{\Pi_k} + \underbrace{\overline{p' \cdot \frac{\partial v_i'}{\partial x_i}}}_{\phi_k} + \underbrace{\mu \cdot \overline{v_i' \frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_j^2}}}_{\Downarrow \text{ riscriviamolo...}} \quad (*)$$

Ora: $$\frac{\partial^2 (v_i' v_i')}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}(v_i' v_i')\right] = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(2 v_i' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\right)$$

$$= 2 \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} + 2 v_i' \frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_j^2}$$

da cui $\overline{v_i' \cdot \frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_j^2}} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\overline{v_i' v_i'})}{\partial x_j^2} - \overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}}$

e la ⊛ diventa :

$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_j \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)}_{\frac{Dk}{Dt}} = \underbrace{- \rho\, \overline{v_i' v_j'} \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}}_{\substack{\text{Production by mean strain rate} \\ P_K}} \underbrace{- \rho\, \overline{v_i' v_j' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}}}_{\substack{\text{Turbulent transport} \\ \text{(of TKE by Reynolds stresses)} \\ T_K}}$$

$$\underbrace{- \frac{\partial (\overline{p' v_i'})}{\partial x_i}}_{\substack{\text{Pressure diffusion} \\ \text{(transport of TKE by pressure)} \\ \Pi_K}} + \underbrace{\overline{p' \frac{\partial v_i'}{\partial x_i}}}_{\substack{\text{Pressure-strain diffusion} \\ \emptyset_K}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \frac{\partial^2 (\overline{v_i' v_i'})}{\partial x_j^2}}_{\substack{\text{Molecular viscous transport} \\ \text{(of TKE by viscous stresses)} \\ D_K}} \underbrace{- \mu \left(\overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}} \right)}_{\substack{\text{Viscous dissipation rate} \\ \mathcal{E}_K}}$$

Infine : $\frac{\partial (v_i' v_j' v_i')}{\partial x_j} = \cancel{v_i' \cdot v_i' \cdot \underbrace{\frac{\partial v_j'}{\partial x_j}}_{=0 \times \text{continuità}}} + v_j' \frac{\partial (v_i' v_i')}{\partial x_j}$

$$= 2 v_i' v_j' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}$$

ovvero : $\boxed{T_K = - \frac{1}{2} \rho \frac{\partial (\overline{v_i' v_i' v_j'})}{\partial x_j}}$.

L'equazione :

$$\boxed{\frac{Dk}{Dt} = P_K - \mathcal{E}_K - T_K - \Pi_K + \emptyset_K + D_K}$$

costituisce la base per quasi tutti i modelli di turbolenza sviluppati per migliorare il modello di Prandtl

⊛ $\mu^{turb} = \rho \ell^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right|$ con ℓ = LUNGHEZZA DI MESCOLAMENTO (MIXING LENGTH

In effetti, possiamo collegare direttamente K a $\nu^t = \frac{\mu^t}{\rho}$
facendo semplici considerazioni dimensionali:

$$\left.\begin{aligned} [\nu^t] &= [m^2/s] \\ [K] &= [m^2/s^2] \end{aligned}\right\} \quad \nu^t \propto K^{1/2} \cdot \ell$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\nu^t = C_\mu K^{1/2} \cdot \ell} \quad (**)$$

N.B. $\nu^t = \mu^t/\rho \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{\mu^t}{\nu^t}}$

$K = \frac{1}{2}\rho \overline{v_i' v_i'} \Rightarrow \boxed{\frac{K}{\rho} = \frac{1}{2}\overline{v_i' v_i'}}$

con ℓ = lunghezza caratteristica del flusso turbolento (non necessariamente uguale/coincidente con la lunghezza di mescolamento).

$$\boxed{\nu_t \sim \ell \Delta u}$$

$\rightarrow \Delta u \sim \ell \left| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right|$ in $(*)$

$\rightarrow \Delta u \sim K^{1/2}$ in $(**)$

Sulla base di queste considerazioni, Prandtl stesso iniziò ad utilizzare l'eq. di trasporto della TKE per migliorare i modelli di turbolenza. Serve però trovare una espressione per la lunghezza caratteristica ℓ. Una possibilità è costruirla usando:

$\longrightarrow$

$$[K] = \left[\frac{m^2}{s^2}\right] \quad \text{ed} \quad [\epsilon] = \left[\frac{m^2}{s^3}\right]$$

$$[m] \; l = \frac{K^{3/2}}{\epsilon} \Rightarrow \boxed{\nu_T = C_\mu K^{1/2} \cdot \frac{K^{3/2}}{\epsilon} = C_\mu \frac{K^2}{\epsilon}}$$

$$[s] \; \tau = \frac{K}{\epsilon} \Rightarrow \left[\frac{m}{s}\right] u = \frac{l}{\tau} = K^{1/2} \text{ appunto!}$$

$$\boxed{\text{MODELLO } K-\varepsilon}$$

Appartiene alla classe dei modelli di turbolenza cosiddetti a 2 equazioni [più le 3 RANS e la continuità per il campo di moto].

Le eq. del modello, in particolare, sono quelle di trasporto per l'en. cinetica turbolenta, K [TKE], e per la dissipazione, ε_k.

In generale, ε_k si definisce come:

$$\varepsilon_k = \nu \left(\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_i'}{\partial x_i}} \right) = \nu \left(\overline{\frac{\partial u_x'}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_x'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial u_y'}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_y'}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial u_z'}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_z'}{\partial z}} \right)$$

e rappresenta la frazione di energia trasferita dal flusso medio alla turbolenza.

L'equazione di trasporto per K nel modello K-ε è:

$$\frac{DK}{Dt} = \frac{\partial K}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = P_K - \varepsilon_K - \frac{\partial T'}{\partial x_j} \quad (*)$$

in cui si è trascurato il termine ϕ_K e si è posto:

$$T' \triangleq \frac{1}{2}\rho\left(\overline{u_i' u_i' u_j'}\right) + \overline{p' v_j'} - \frac{1}{2}\mu \frac{\partial\left(\overline{v_i' v_i'}\right)}{\partial x_j}$$

ovvero $\boxed{\dfrac{\partial T'}{\partial x_j} = T_K + \Pi_K - D_K}$. Il termine T' è quello da modellare per "chiudere" l'equaz. (*). Nel modello K-ε ciò viene fatto assumendo che T' (fisicamente rappresentabile come flusso di energia) sia:

$$\boxed{T' = -\frac{\mu^t}{\sigma_K} \cdot \frac{\partial K}{\partial x_j}}$$

GRADIENT DIFFUSION MODEL

Il coefficiente di chiusura σ_K è l'analogo del numero di Prandtl per il caso turbolento:

$$\boxed{\sigma_K = \frac{\text{DIFFUSIVITÀ DI Q.D.M.}}{\text{DIFFUSIVITÀ DI TKE}}}$$

- DIFFUSIONE è il processo
- DIFFUSIVITÀ è la velocità (il rate) a cui avviene la diffusione

In base a questa definizione (e assunzione) si ha:

Ⓐ $$\boxed{\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \varepsilon_k + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\nu^t}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j}\right]}$$ EQ. TRASP. TKE NEL MODELLO K-ε

L'eq. di trasporto per ε_k si deriva mediante analoghe considerazioni. Poiché la derivazione è complessa, si fornisce l'espressione finale senza dimostrazione:

Ⓑ $$\boxed{\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon_k}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_k^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\nu^t}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_j}\right]}$$ EQ. TRASP. ε_k IN MOD K-

dove $\varepsilon_k = \varepsilon$ ovviamente.

Il coeff. di chiusura σ_ε è l'analogo di σ_k in termini però di dissipazione:

$$\boxed{\sigma_\varepsilon = \frac{\text{DIFFUSIVITA' DI Q.D.M. TURBOLENTA}}{\text{DIFFUSIVITA' DI DISSIPAZIONE}}}$$

Il modello accoppia le 2 eq. di trasporto alle RANS:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \underbrace{\left(\frac{\mu + \mu^t}{\rho}\right)}_{\nu + \nu^t} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} \qquad \boxed{\nu^t = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon_k}}$$

la cui soluzione $\bar{u}_i$ è necessaria per risolvere Ⓐ e Ⓑ.

Il modello prevede inoltre di assegnare dei valori a diverse costanti:

1. $\boxed{C_\mu = 0{,}09}$

Questo valore deriva da considerazioni fatte per flusso turbolento di shear (quindi flusso in cui la velocità varia in direzione perpendicolare al flusso medio, senza necessariamente prevedere la presenza di pareti). In tale flusso:

$\nu_T = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon}$

$\nu_T = \frac{|\overline{u_i' u_j'}|^2}{P^2}$

$$\frac{|\overline{u_i' u_j'}|}{K} = \sqrt{C_\mu \frac{P}{\varepsilon_k}} \Rightarrow C_\mu = \left(\frac{|\overline{u_i' u_j'}|}{K}\right)^2 \cdot \frac{\varepsilon_k}{P}$$

e, da osservazioni empiriche, si sa che $\frac{|\overline{u_i' u_j'}|}{K} \cong 0.3$ se $P \cong \varepsilon_k$. Pertanto: $C_\mu = (0,3)^2 \cdot 1 = 0,09$ CVD!! (*)

2. $\boxed{\sigma_k = 1.0}$

Questo valore prevede che q.d.m. e TKE diffondano alla stessa maniera. Se così non è, però, il valore di σ_k non corrisponde più alla realtà del processo fisico ed il modello potrebbe non essere più affidabile.

3. $\boxed{\sigma_\varepsilon = 1.3}$

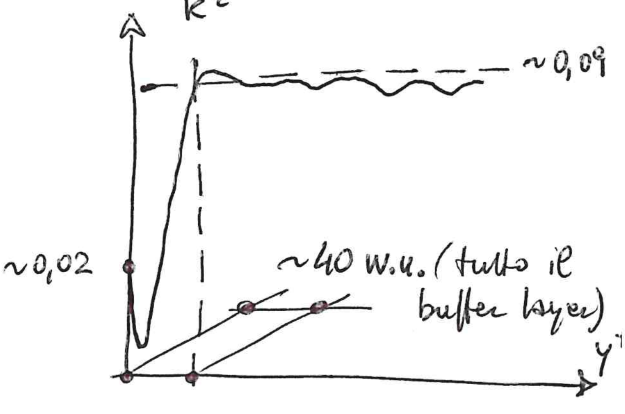
4. $\boxed{C_{\varepsilon 1} = 1.44}$ Valori "standard"

5. $\boxed{C_{\varepsilon 2} = 1.92}$

Questo valore è ricavato fittando diverse serie di dati sperimentali ottenuti per grid turbolence ovvero flussi turbolenti ...

(*) In channel flow però:

$$C_\mu = \frac{\nu^t \cdot \varepsilon_k}{k^2}$$



facendo passare un fluido attraverso una griglia.
Il fluido, spinto ad es. da un gradiente di pressione, genera un flusso turbolento quando passa attraverso la griglia. La turbolenza di griglia ha la caratteristica di essere omogenea e decade di intensità man mano che ci si allontana dalla griglia lungo la direzione di flusso medio.

Altri set di valori per le costanti sono reperibili in letteratura. Uno dei più utilizzati è:

$$\boxed{C_\mu = 0{,}0845 \,,\quad \sigma_K = \sigma_\varepsilon = 0.72 \,,\quad C_{\varepsilon 1} = 1.42 \,,\quad C_{\varepsilon 2} = 1.68}$$

e in questo caso si parla di <u>MODELLO K-ε RNG</u>
dove RNG = Renormalization Group Method.

<u>Difetti del Modello K-ε</u>:

1. Diversi termini nelle equazioni del modello sono modellati utilizzando la <u>GRADIENT DIFFUSION ASSUMPTION</u>: preso uno scalare ϕ, si assume che il flusso turbolento di ϕ, $\overline{\vec{u}'\phi'}$ in forma vettoriale, avvenga nella direzione del gradiente dello scalare, $-\nabla\overline{\phi}$. In base a tale ipotesi, esisterà uno scalare positivo, $\Gamma_T(\vec{x},t)$ detto DIFFUSIVITÀ TURBOLENTA, per cui: $\boxed{\overline{\vec{u}'\phi'} = -\Gamma_T \cdot \nabla\overline{\phi}}$

Matematicamente, la gradient diffusion assumption è analoga alla legge di Fourier per la conduzione di calore e alla legge di Fick per la diffusione molecolare.

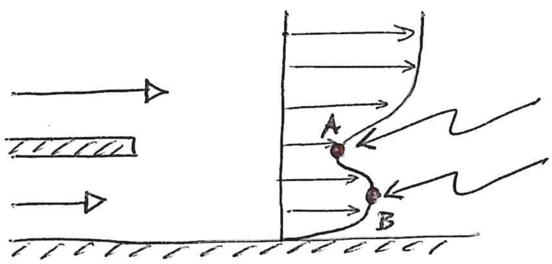
- $\dot{q} = -K \cdot \nabla T$ FOURIER
- $J = -D \cdot \nabla \phi$ FICK

In base alla gradient diffusion assumption, il flusso $\overline{\vec{u}'\phi'}$ è sempre allineato con il gradiente $\nabla\bar{\phi}$. Applicando tale assunzione per modellare lo sforzo di taglio turbolento avremmo:

$$\tau^t_{xy} = -\rho \overline{u'_x u'_y} = \mu^t \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}$$

$$\overline{\vec{u}\phi'} \qquad \Gamma_T \qquad \nabla\bar{\phi} \qquad \text{in 2D!!}$$

ovvero $\tau^t_{xy} = 0$ se $\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} = 0$. Ciò non è sempre vero:



In A e B, $\partial \bar{u}_x / \partial y = 0$ ma non è detto che nella realtà τ^t_{xy} sia zero (nel modello invece sì).

2. La eddy viscosity ν^t è assunta isotropa, ma tale assunzione non è valida per flussi turbolenti fortemente 3D o con curvature significative.

3. In presenza di forte deformazione in direzione normale al flusso medio (come ad es. in prossimità della parete in un flusso di canale), K viene sovrastimato e quindi anche $\nu^t \propto K$ viene sovrastimata. Valori troppo elevati di K e ν^t producono una cattiva predizione delle strutture del flusso e di eventuali fenomeni di separazione.

4. In flussi con separazione, il valore di ε_K è sottostimato vicino alla parete e quindi l'energia del flusso è sovrastimata (vedi punto 3.). Ciò può portare a "ritardi" nella separazione (che avviene dopo rispetto al caso reale) ma anche a sovrastime dei tassi di trasferimento del calore in flussi termici.

Nonostante questi svantaggi, resta uno dei modelli più diffusi e utilizzati (e.g. nei codici di fluidodinamica commerciale).

MODELLO K-ω

- LOW REYNOLDS NUMBER MODEL
- PREFERIBILE A k-ε CON FLUSSI INTERNI (e.g. CANALE, TUBO), FLUSSI CON FORTE CURVATURA, FLUSSI CON SEPARAZIONE, GETTI
- MINOR CONVERGENZA E MAGGIOR SENSITIVITA' ALLE C.I. RISPETTO A k.

E' un altro modello di turbolenza a 2 equazioni.
L'energia cinetica turbolenta k viene mantenuta come variabile del modello mentre la dissipazione ε_k viene sostituita dalla vorticità:

$$\boxed{\omega \triangleq \frac{\varepsilon_k}{k}}$$

Ponendo $\varepsilon_k = \omega \cdot k$ nell'eq. di trasporto per ε_k si trova la seguente eq. di trasporto per ω:

$$\underbrace{\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}}_{\frac{D\omega}{Dt}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu^t}{\sigma_\omega}\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}\right)}_{\nabla\cdot\left(\frac{\nu^t}{\sigma_\omega}\nabla\omega\right)} + (C_{\varepsilon 1} - 1)\frac{P\omega_i}{k} - (C_{\varepsilon 2} - 1)\omega_i^2 + \frac{2\nu^t}{\sigma_\omega k}\underbrace{\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial k}{\partial x_j}}_{\nabla\omega\cdot\nabla k}$$

MODELLI ALGEBRICI (o A ZERO EQ.)

(1) MIXING LENGTH MODEL (Prandtl)

$$\tau_{ij}^{turb.} = -\rho\,\overline{u_i' u_j'} \Rightarrow \boxed{\frac{\tau_{ij}^{turb}}{\rho} = -\overline{u_i' u_j'} \cong \nu^t \left[\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right]}$$

Tramite considerazioni dimensionali:

$$[\nu^t] = \left[\frac{m^2}{s}\right] \sim L\,\Delta u$$

Che espressione hanno L e Δu? L è la <u>mixing length</u> (lunghezza di mescolamento) ovvero la lunghezza entro cui le strutture del flusso mantengono la loro coerenza, la loro q.d.m. e la propria energia.

Fluttuazione di velocità in corrispondenza di L

$$\boxed{\Delta u \sim L \left|\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right|}$$

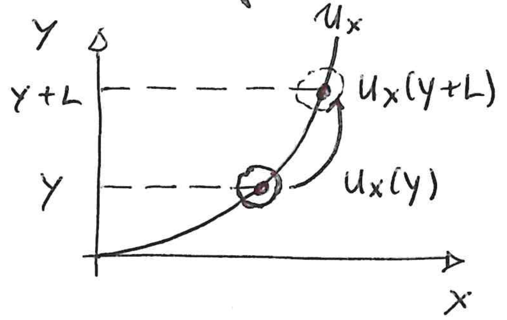
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\nu^t = L^2 \left|\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right|}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\tau_{ij}^{turb}}{\rho} = L^2 \left|\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right| \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right)}$$

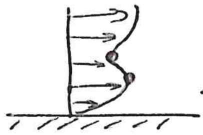
Parametro chiave!!



$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \simeq \frac{u_x(y+L) - u_x(y)}{L} = \frac{\Delta u}{L} \Rightarrow \Delta u = L\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right.$$

MIXING LENGTH MODEL FOR τ^{turb}.

Se riesco a stimare L allora ho un modello semplice e pratico per calcoli ingegneristici (= spannometrici...)

Anche il mixing length model è un modello basato sulle ipotesi di gradient diffusion e quindi predice flusso nullo (i.e. trasporto nullo) laddove si annulla il gradiente medio. Ciò però non è sempre vero, soprattutto in flussi complessi (tipo )

Altro problema è che la lunghezza di mescolamento non è universale ma cambia da flusso a flusso o addirittura in zone diverse dello stesso flusso.

Altri modelli algebrici:

- Smagorinsky:

$$\boxed{\nu^t = 2L^2\left(\overline{e_{ij}}\cdot\overline{e_{ij}}\right)^{1/2}}$$

$$\overline{e_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right)$$

Mean Strain Rate → MISURA IL TASSO DI DEFORMAZIONE DI UN ELEMENTINO DI FLUIDO

Any matrix J can be decomposed in a symmetric part and in an asymmetric part: $E = \frac{1}{2}(J+J^T)$, $R = \frac{1}{2}(J-J^T)$

- Baldwin & Lomax:

$$\boxed{\nu^t = L^2\left(2\overline{\Omega_{ij}}\,\overline{\Omega_{ij}}\right)^{1/2}}$$

$$\overline{\Omega_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right)$$

MODELLI A UNA EQUAZ.

Questi modelli richiedono un'equazione di trasporto per un'unica qtà turbolenta, ovvero la TKE.

Tale equazione è necessaria per poter valutare la eddy viscosity secondo la seguente espressione:

$$\nu^t \sim L\,\Delta u \;\begin{cases} \nearrow L = \text{mixing length} \\ \searrow \Delta u \sim K^{1/2} \end{cases} \;\rightarrow\; \nu^t \sim L K^{1/2}$$

ovvero :

$$\circledast \quad \boxed{\mu^t = C L K^{1/2}}$$

TURBULENT (o EDDY) VISCOSITY

con C costante.

Per conoscere μ^t devo quindi:

- specificare la mixing length $L \equiv L(\vec{x}, t)$
- determinare $K \equiv K(\vec{x}, t)$ dall'eq. di trasporto:

$$\circledast \quad \boxed{\frac{Dk}{Dt} = \nabla \cdot \left(\frac{\mu^t}{\sigma_k} \nabla K \right) + P - \varepsilon}$$

- modellare ε e lo faccio come:

$$\circledast \quad \boxed{\varepsilon = C_D \frac{K^{3/2}}{L}} \qquad \left[\varepsilon \sim \frac{K^{3/2}}{L} \right]$$

con C_D costante. Poiché $L = \dfrac{\mu^t}{C k^{1/2}}$ si ottiene:

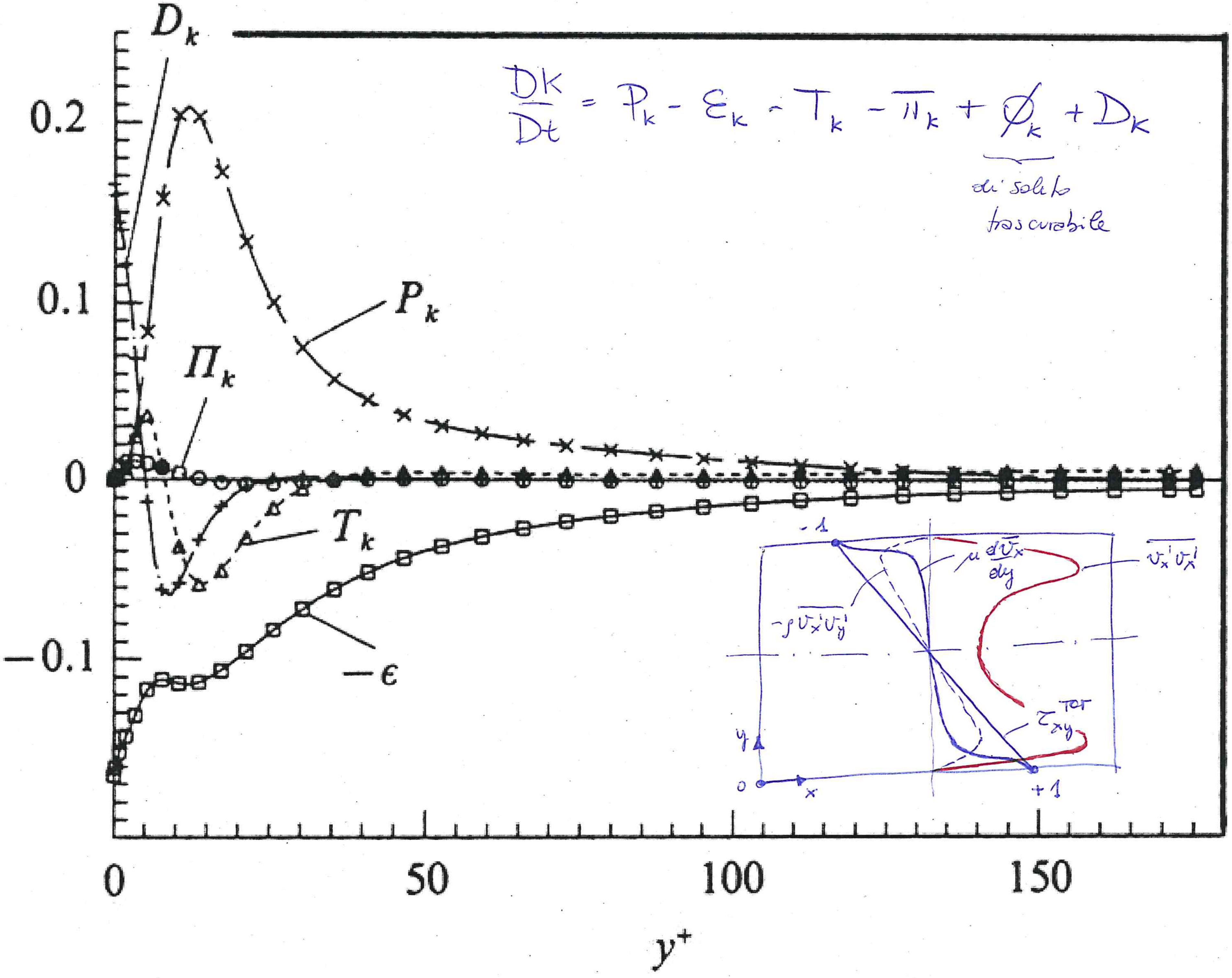
$$\varepsilon = C\, C_D \frac{K^2}{\mu^t} \Rightarrow \boxed{\frac{\mu^t \varepsilon}{K^2} = C\, C_D = \text{COST}}$$

Oltre alle $\circledast$, si assume anche che:

$$\boxed{\overline{u_i' u_j'} = \frac{2}{3} K \delta_{ij} - \mu^t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)}$$

TURBULENT VISCOSITY HYPOTHESIS

Tale ipotesi dice che <u>la parte deviatorica dello stress</u> di Reynolds, $-\rho \overline{u_i' u_j'} + \frac{2}{3} \rho K \delta_{ij}$ è <u>proporzionale al mean rate of</u>


$\frac{DK}{Dt} = P_k - \varepsilon_k - T_k - \Pi_k + \underbrace{\phi_k}_{\text{di solito trascurabile}} + D_k$
D_k
P_k
Π_k
T_k
$-\epsilon$
0.2
0.1
0
−0.1
0
50
100
150
y^+
$\mu \frac{d\bar{v}_x}{dy}$
$\overline{v_x' v_x'}$
$-\rho \overline{v_x' v_y'}$
τ_{xy}^{TOT}
-1
+1
y
x
o