Modelling of Turbulent Flows

Lecture 1.1 - Supplementary material

March 20, 2020

Energy Balance in Laminar Flow

Outline

Flow Configuration

Consider the case of laminar Poiseuille flow in a plane channel (see Fig. 1). Assume incompressible and steady flow of a Newtonian fluid.

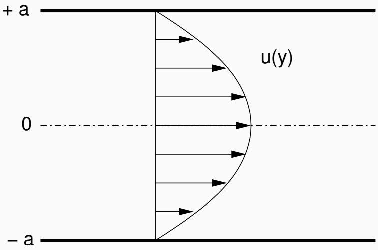


Figure 1: Fluid velocity profile for laminar channel flow.

Balance Equations

The Navier-Stokes equations are:

$$\rho \frac{D\overline{u}}{Dt} = -grad\ p + \mu \nabla^2 \overline{u} \tag{1}$$

In the mean flow direction, the governing momentum equation becomes:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad . \tag{2}$$

This equation states that the pressure gradient balances viscous forces.

Multiply by u to obtain the energy equation:

$$0 = -u\frac{\partial p}{\partial x} + \mu u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ . \tag{3}$$

Let $\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial y}$. We may write:

$$\frac{\partial(\tau u)}{\partial y} = \tau\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial \tau}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \mu u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ . \tag{4}$$

Since $u = u(y)$, we may also write:

$$u\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(pu)}{\partial x} - p\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(pu)}{\partial x} \ . \tag{5}$$

Physical Meaning of Terms *I* to *III*

Thus, we end up with the following energy balance:

$$0 = \underbrace{-\frac{\partial (pu)}{\partial x}}_{I} + \underbrace{\frac{\partial (\tau u)}{\partial y}}_{II} \underbrace{- \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}_{III} \quad . \tag{6}$$

The terms in the equation represent the following:

Term I = work by pressure forces (per unit volume, time)

Term II = work by viscous forces (per unit volume, time)

Term III = viscous dissipation (per unit volume, time)

The momentum equation can be solved for:

$$u\left(y\right) = \frac{3}{2} U_{ave} \left[1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2\right] \quad . \tag{7}$$

The average velocity is:

$$U_{ave} = \frac{Q}{A} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} u dy \quad . \tag{8}$$

The shear stress is:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{3\mu U_{ave}}{a^2} y \quad . \tag{9}$$

The pressure comes from:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y} = -\frac{3\mu U_{ave}}{a^2} \quad . \tag{10}$$

Substitution into the energy equation yields:

$$0 = \frac{9\mu U_{ave}^2}{2a^2}\left[\underbrace{\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)}_{I}+\underbrace{\left(\frac{3y^2}{a^2}-1\right)}_{II}-\underbrace{\left(\frac{2y^2}{a^2}\right)}_{III}\right] \quad . \qquad (11)$$

Fig. 2 shows the behaviour of terms *I* to *III* across the channel.

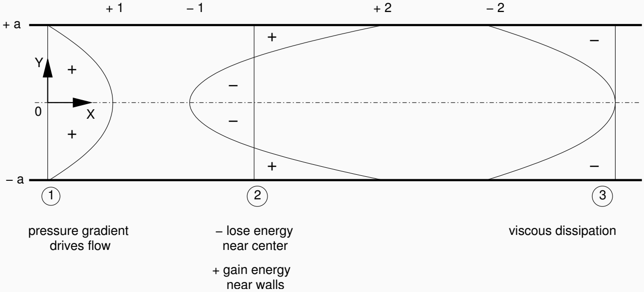


Figure 2: Energy contributions in laminar flow.

Physical Interpretation

Maximum energy dissipation occurs at the wall, where work done by the fluid is minimum. To understand the work done by shear, examine the shear exerted on a fluid parcel (Fig. 3).

Near the wall (where $u < U_{ave}$), the parcel feels a net acceleration. Away from the wall (where $u > U_{ave}$), it feels a net deceleration, which is maximum in the center (where the parcel moves at U_{max}).

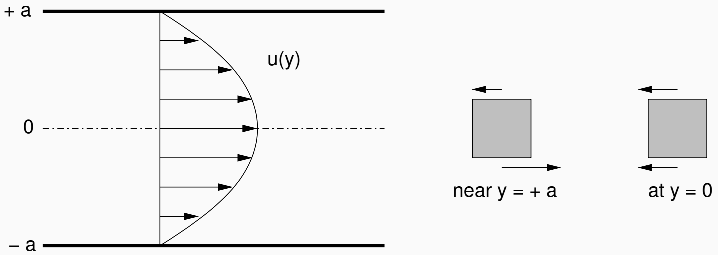
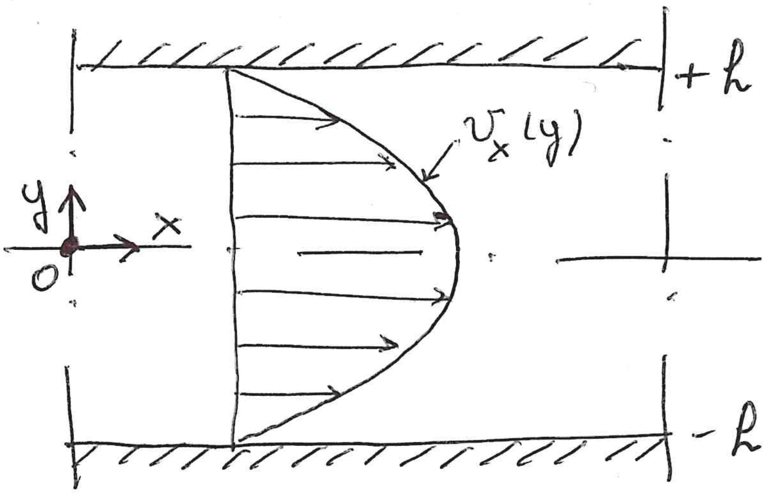


Figure 3: Shear forces acting on a fluid particle.

[2°] BILANCIO DELL'ENERGIA PER FLUSSO LAMINARE

(e.g. IN CANALE)



Ipotesi:

- Flusso incomprimibile
- Flusso stazionario
- Fluido Newtoniano

Le equazioni di bilancio sono la continuità e Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 & \xRightarrow{\text{CASO 2D}} \quad \dfrac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \\[2ex] \rho \cancel{\dfrac{D v_i}{Dt}} = -\nabla_i p + \mu \dfrac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} & \xRightarrow{\text{CASO 2D}} \quad 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \end{cases}$$

$\cancel{\dfrac{Dv_i}{Dt}} \to 0$ se flusso stazionario!

$$\left[0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right]$$

L'eq. dell'energia si ottiene moltiplicando tutto per v_x:

$$\boxed{0 = -v_x \frac{\partial p}{\partial x} + \mu v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}} \quad (1)$$

Ricordando che $\tau_{xy} \triangleq \mu \dfrac{\partial v_x}{\partial y}$ (con $\partial v_y / \partial x = 0$) si ha:

- $$v_x \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial (p v_x)}{\partial x} - p \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial x}}^{=0 \text{ dalla continuità}}$$

- $$v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = v_x \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = v_x \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau_{xy}}{\mu}\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu} v_x \cdot \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial(\tau_{xy} \cdot v_x)}{\partial y} - \tau_{xy}\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]$$

$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \rightsquigarrow$

$$= \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial(\tau_{xy} \cdot v_x)}{\partial y} - \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2\right]$$

L'eq. (1) diventa:

$$\boxed{0 = \underbrace{-\frac{\partial(p v_x)}{\partial x}}_{\substack{\text{LAVORO DELLE FORZE DI PRESSIONE}\\ \text{(PER UNITÀ DI VOLUME E DI TEMPO)}}} + \underbrace{\frac{\partial(\tau_{xy} \cdot v_x)}{\partial y}}_{\substack{\text{LAVORO DELLE FORZE VISCOSE}\\ \text{(PER UNITÀ DI VOL. E TEMPO)}}} \underbrace{- \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2}_{\substack{\text{DISSIPAZIONE VISCOSA}\\ \text{(PER UNITÀ DI VOL. E TEMPO)}}}} \quad (2)$$

NOTA: $$\int_{-h}^{+h} \frac{\partial(\tau_{xy} \cdot v_x)}{\partial y} dy = \tau_{xy}(y=+h) \cdot \cancel{v_x(y=+h)}^{=0} - \tau_{xy}(y=-h) \cdot \cancel{v_x(y=-h)}^{=0} = 0$$

ovvero il lavoro delle forze viscose è zero se integrato su tutta la sezione del canale quando le pareti del

Candele sono ferme come nel caso di moto di Poiseuille. Se avessimo moto di Couette - Poiseuille allora almeno una delle c.c. $v_x(y=+h)$ / $v_x(y=-h)$ sarebbe diversa da zero, fornendo così lavoro non nullo.

L'eq. (2) è risolvibile conoscendo il profilo di velocità:

$$\boxed{v_x(y) = \frac{3}{2}\langle v_x\rangle\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]}$$

con $\langle v_x\rangle = \frac{Q}{A} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} v_x(y)\,dy$.

- $\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{3}{2}\langle v_x\rangle\left(0 - \frac{2y}{h^2}\right) = -\frac{3\langle v_x\rangle \cdot y}{h^2}$
- $\tau_{xy} = \mu\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{3}{2}\mu\langle v_x\rangle\left(0 - \frac{2y}{h^2}\right) = -\frac{3\mu\langle v_x\rangle y}{h^2}$
- $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y} = -\frac{3\mu\langle v_x\rangle}{h^2}$ ← $\Delta p\cdot(\cancel{2}hW) = (\tau_w\cdot L W)\cdot\cancel{2}$
  $\frac{\Delta p}{L} = \frac{\tau_w}{h} \equiv \frac{dp}{dx} = \frac{d\tau}{dy}$

$\hookrightarrow$ $v_x\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(p v_x)}{\partial x} = -\frac{9}{2}\frac{\mu\langle v_x\rangle^2}{h^2}\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]$

→

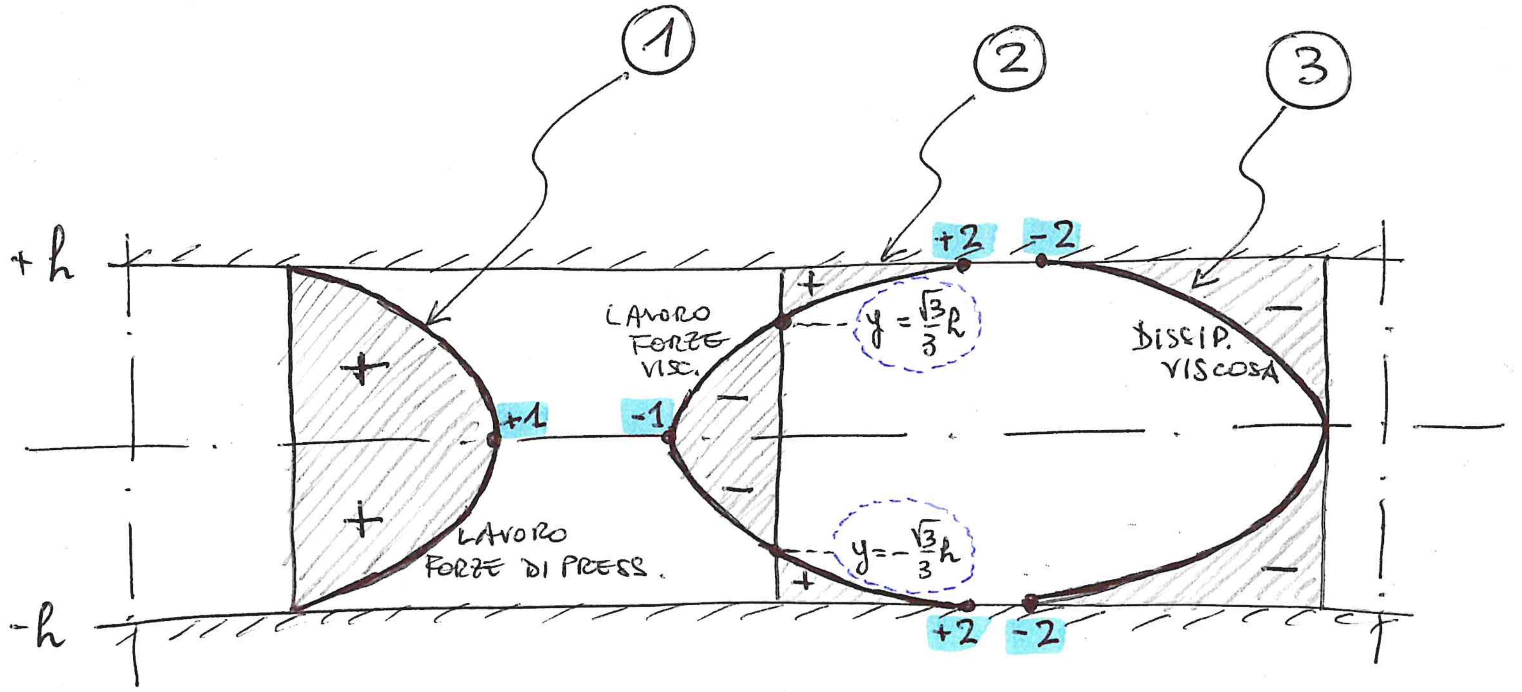
$$\frac{\partial(\tau_{xy} \cdot v_x)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{3\mu\langle v_x\rangle y}{h^2}\cdot\frac{3}{2}\langle v_x\rangle\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right)\right]$$

$$= -\frac{9\mu\langle v_x\rangle^2}{2h^2}\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(y-\frac{y^3}{h^2}\right)}_{1-3y^2/h^2}$$

$$= -\frac{9\mu\langle v_x\rangle^2}{2h^2}\cdot\left(1-\frac{3y^2}{h^2}\right)$$

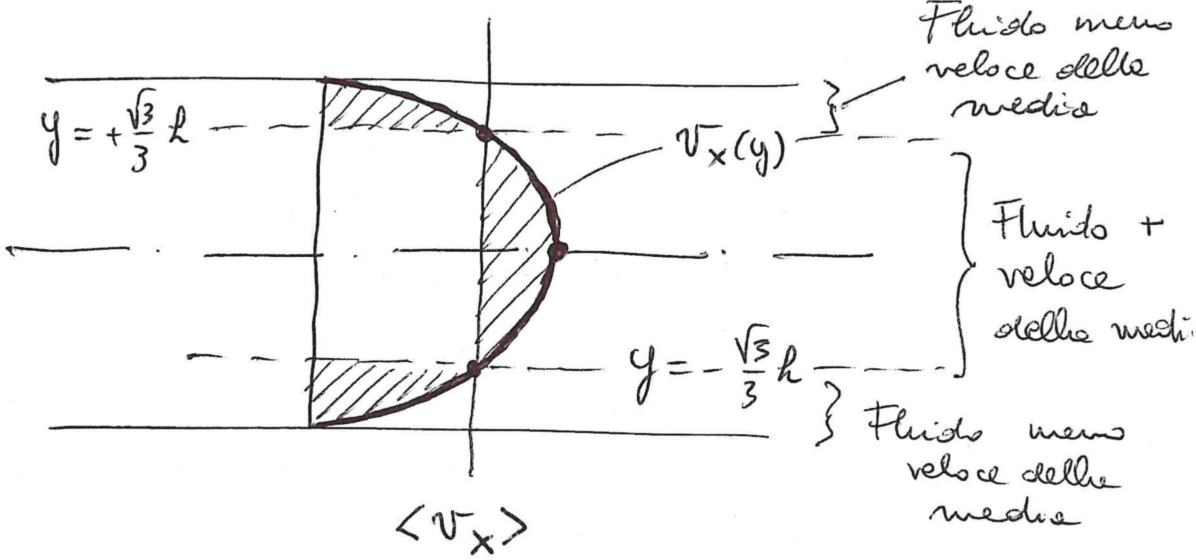
$$\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 = +\frac{9\mu\langle v_x\rangle^2 y^2}{4h^4} = +\frac{9\mu\langle v_x\rangle^2}{2h^2}\cdot\frac{2y^2}{2h^2}$$

$$0 = \frac{9}{2}\frac{\mu\langle v_x\rangle^2}{h^2}\left\{\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]-\left(1-\frac{3y^2}{h^2}\right)-\frac{2y^2}{2h^2}\right\}$$



$+$ = guadagno di energia ; $-$ = perdita di energia

N.B. Il punto $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} h$ è il punto dove $v_x = \langle v_x \rangle$!



Quando una particella fluida si trova vicino alla parete (distanza $< \frac{\sqrt{3}}{3} h$ dalla parete) si muove più lentamente del flusso medio e "sente" quindi un'accelerazione imposta dal gradiente.
Quando la particella si trova lontano dalla parete (distanza $> \frac{\sqrt{3}}{3} h$) si muove più velocemente del flusso medio e "sente" quindi una decelerazione.
Ciò spiega i segni + e − del termine 2:
Quando il lavoro delle forze viscose serve ad "accelerare" il fluido allora tale lavoro ha segno positivo. Quando serve a "decelerare" il fluido allora ha segno negativo.

$\boxed{1°}$ RICHIAMI DELLE EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE

Dato un volume di fluido ΔV contenente una massa Δm di fluido e racchiuso da una superficie ΔS, le equazioni fondamentali della fluidodinamica si ottengono applicando il principio di conservazione:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \dot{\Gamma}_{in} - \dot{\Gamma}_{out}$$

con Γ = q.tà che si conserva nel volume di controllo.

1. CONS. MASSA ($\Gamma = m$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{(VETT.)}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \quad \text{(SCAL.)}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

EQ. CONTINUITÀ (per fluido incompress.)

con $\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$ DENSITÀ DEL FLUIDO

$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$ VETT. VELOCITÀ DEL FLUIDO

2. CONS. Q.d.M. ($\Gamma = m\vec{v}$)

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho \vec{g} \quad \text{(VETT.)}$$

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad \text{(SCAL.)}$$

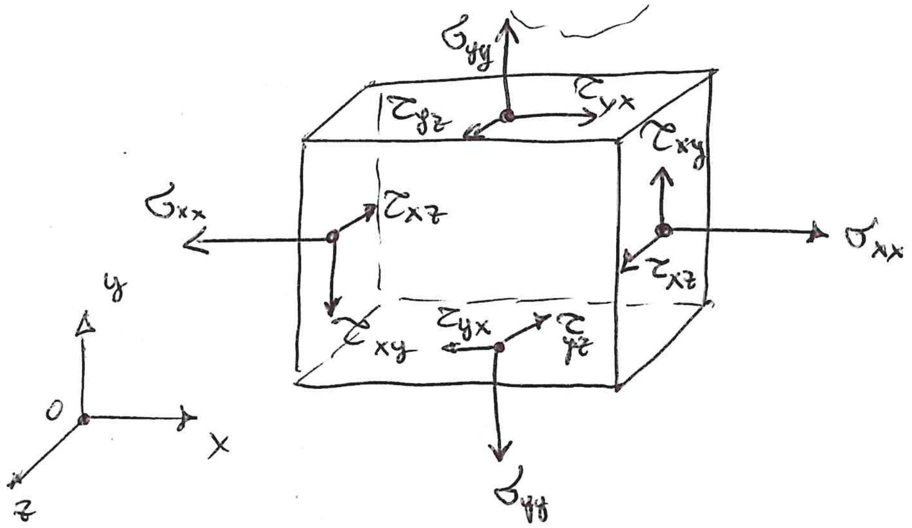
EQ. DI CAUCHY (per fluido incompr.)

I termini σ_{ij} rappresentano gli sforzi di taglio agenti sul volume ΔV e sono elementi del TENSORE DEGLI SFORZI (simmetrico):

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

SFORZI TANGENTI (A ΔS)

SFORZI NORMALI (A ΔS)



$$\sigma_{ii} = -p + 2\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\mu \bar{\nabla}\cdot\vec{v}$$

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

Se il fluido è Newtoniano, le eq. di Cauchy si riducono alle eq. di Navier-Stokes:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

spiegare termini convettivi e diffusivi!

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2}$$

3. CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA ($\Gamma = E_{TOT}$)

T = temperatura (= SCALARE PASSIVO !)

$$\rho C_p \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right)}_{\frac{DT}{Dt}} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

CALORE SPECIFICO A PRESSIONE COSTANTE $[J/kg\,K]$

CONDUCIBILITÀ TERMICA $\left[\frac{W}{mK}\right]$ $\quad \lambda \triangleq \frac{q}{\nabla T}$

Le equazioni di conservazione finora ricavate sono scritte in forma dimensionale, ma di solito si utilizzano in forma adimensionale:

$$\tilde{t} = \frac{t}{t_{ref}} = \frac{t \cdot U_{ref}}{L_{ref}} \; ; \quad \tilde{x} = \frac{x}{L_{ref}} \; ; \quad \tilde{v}_i = \frac{v_i}{U_{ref}}$$

$$\tilde{T} = \frac{T}{T_{ref}} \; ; \quad \tilde{p} = \frac{p}{p_{ref}} = \frac{p}{\rho U_{ref}^2}$$

$$\Downarrow$$

CONTINUITÀ ADIM. $\quad \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_i} = 0$

NS ADIM. $\quad St \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j^2}$

Con $St = \frac{L_{ref}}{U_{ref} \cdot t_{ref}} = 1$ NUM. DI STROUHAL

$$Re = \frac{\rho\, U_{ref} \cdot L_{ref}}{\mu} = \frac{U_{ref}\, L_{ref}}{\nu}$$ NUM. REYNOLDS

con $\nu = \mu / \rho$ VISCOSITÀ CINEMATICA

ENERGIA ADIM

$$\boxed{St\,\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_j\,\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{1}{Re \cdot Pr} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j^2}}$$

con $Pr = \dfrac{\mu C_p}{\lambda}$ NUM. PRANDTL

$$\stackrel{!}{=} \frac{\text{DIFFUSIVITÀ CINEMATICA } (\nu)}{\text{DIFFUSIVITÀ TERMICA } (\alpha)}$$

(o COEFF. DI DIFF. CALORE)

- ν = COEFF. DI DIFFUSIONE DI QTÀ DI MOTO
- α = COEFF. DI DIFFUSIONE DEL CALORE

NOTA 1: $Pr = \dfrac{\nu}{\alpha} = \dfrac{\mu}{\rho} \cdot \dfrac{1}{\dfrac{\lambda}{\rho C_p}} = \dfrac{\mu C_p}{\lambda}$!

ovvero Pr indica la tendenza a trasportare qtà di moto piuttosto che calore secondo un meccanismo di tipo diffusivo.

FLUIDO	ARIA (O GAS)	ACQUA	OLIO
Pr	0.7	7	>100

NOTA 2: $Re \cdot Pr = \dfrac{\rho\, U_{ref} \cdot L_{ref}}{\cancel{\mu}} \cdot \dfrac{\cancel{\mu} C_p}{\lambda} =$ NUM. DI PECLET

$$\stackrel{!}{=} \rho C_p U_{ref} \cdot \frac{L_{ref}}{\lambda} = \frac{h\, L_{ref}}{\lambda} = Pe$$

con $h = \rho C_p U_{ref}$

Per il trasporto di massa: $Pe_m = Re \cdot Sc$

con $Sc = \nu / \text{diffusività mole}$

È l'equivalente di Re per il trasporto di calore

$$Pe = \frac{h\, L_{ref}}{\lambda} = \frac{\text{TRASP. CALORE PER CONVEZ.}}{\text{TRASP. CALORE PER DIFFUSIONE}}$$