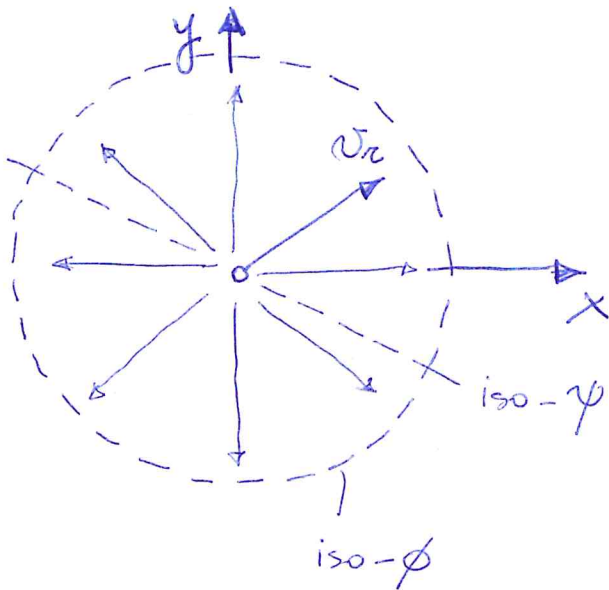


MOTI PIANI A POTENZIALE DI VELOCITÀ (ESEMPI)

1. SORGENTE E POZZO



Sia m la portata volumetrica per unità di lunghezza di fluido che fuoriesce da una sorgente coincidente con l'asse z e che fluisce radialmente verso l'esterno con velocità v_r .

Per definizione: $m = 2\pi r \cdot v_r \Rightarrow v_r = \frac{m}{2\pi r}$

con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Risultate:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{m}{2\pi r} \Rightarrow \phi = \frac{m}{2\pi} \ln r$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$$

POTENZIALE DI VELOCITÀ

CALCOLO DETTAGLIATO:

$$\left. \begin{aligned} d\phi &= \frac{m}{2\pi r} dr \Rightarrow \phi = \frac{m}{2\pi} \ln r + f(\theta) \\ d\phi/d\theta &= 0 \Rightarrow \phi = g(r) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} f(\theta) &= 0 \\ g(r) &= \frac{m}{2\pi} \ln r \end{aligned}$$

Se $m > 0$ allora $v_r \geq 0 \Rightarrow$ flusso radiale verso l'esterno

\Downarrow
il campo di moto è detto SORGENTE

se $m < 0$ allora $v_r \leq 0 \Rightarrow$ flusso radiale verso l'interno

\Downarrow
il campo di moto è detto POZZO

La costante m rappresenta l'intensità della sorgente o del pozzo.

Vale anche:

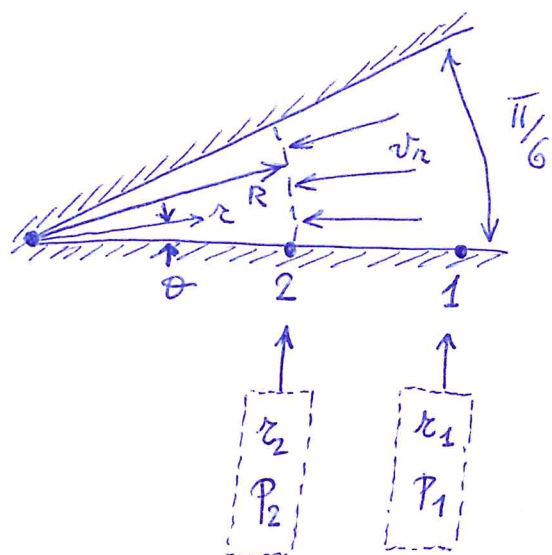
$$v_r = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{m}{2\pi r} \Rightarrow \boxed{\psi = \frac{m}{2\pi} \theta + f(r)} \rightarrow \infty$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \Rightarrow \psi = f(\theta) = \frac{m}{2\pi} \theta$$

Le linee di corrente (iso- ψ) sono i raggi uscenti dall'origine, mentre le linee equipotenziali (iso- ϕ) sono circonferenze concentriche con centro nell'origine.

PROBLEMA :

3



Flusso di fluido perfetto e incomprimibile verso l'apertura formata da due pareti oblique.

Sia:

$$\phi = -2kr$$

il potenziale di velocità.

Determinare la portata m che si scarica nella apertura.

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{2}{r}$$

$$v_{r,1} = -\frac{2}{r_1} \equiv v_1$$

$$v_{r,2} = -\frac{2}{r_2} \equiv v_2$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$$

$$m = \int_0^{\pi/6} v_2 R d\theta = \int_0^{\pi/6} -2 d\theta = -\pi/3 \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

raggio arbitrario (usato per distinguere dalle coord. radiali r)

calcolo di ψ : $d\psi = -r v_r d\theta = -2 d\theta \Rightarrow \int_{in \theta} \psi = -2 \cdot \theta + f'(r)$

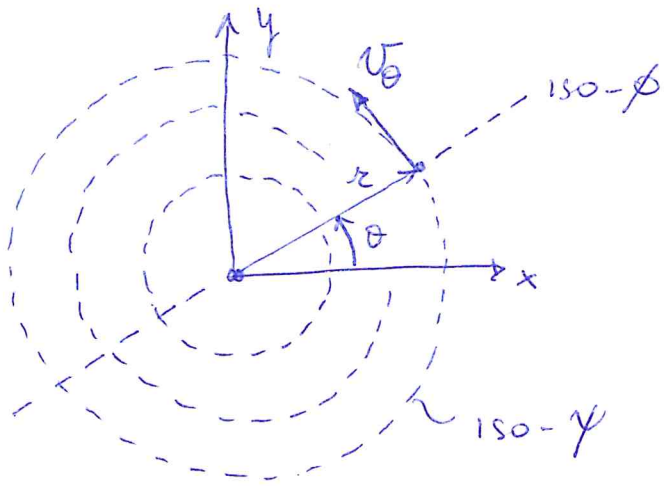
$$d\psi = v_\theta dr = 0 \Rightarrow \int_{in r} \psi = f''(\theta)$$

$$f'(r) = 0 ; f''(\theta) = -2 \cdot \theta \Rightarrow \boxed{\psi = -2 \cdot \theta}$$

Calcolo delle pressioni : $\boxed{P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2)}$
 (tra 1 e 2) $\boxed{= P_1 + 2\rho (r_1^{-2} - r_2^{-2}) < P_1}$

2. VORTICE

L4



Il fluido si muove
nella sola direzione
azimutale θ , formando
linee di corrente equi-
valenti a circonferenze
concentriche (analoghe

alle linee equipotenziali della sorgente/pozzo).

Dato l'analogia, la funzione di corrente di
un vortice avrà la stessa espressione della
funzione potenziale di una sorgente/pozzo:

$$\psi = -K \ln r$$

Lo stesso vale per la funzione potenziale:

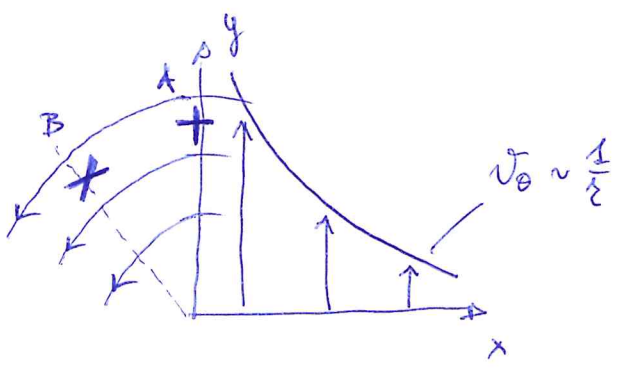
$$\phi = K \cdot \theta$$

Avremo:

$$v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{K}{r}$$

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad \checkmark$$

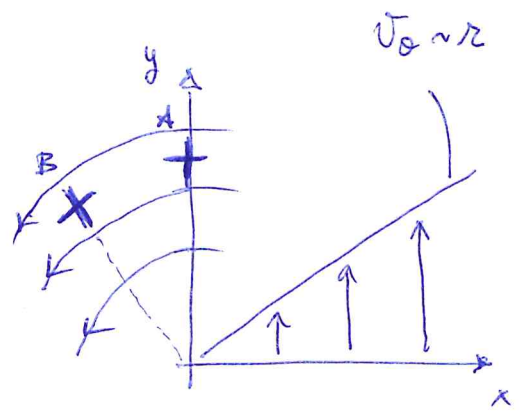
Differenza tra vortice irrotazionale e vortice rotazionale:



VORTICE IRROTATIONALE (O LIBERO)

$$\omega_z = \frac{1}{z} \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}$$

$$= \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial K}{\partial z} = 0 \quad (v_r = 0)$$



VORTICE ROTATIONALE (O FORZATO)

$$\omega_z = \frac{1}{z} \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}$$

$$= \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial(Kr^2)}{\partial r}$$

$$= 2K \quad \checkmark$$

$\uparrow K \equiv \Omega \left[\frac{rad}{s} \right]$

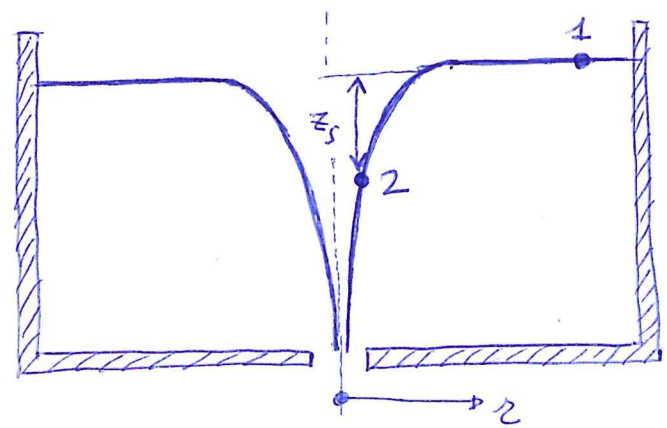
$\Omega = \text{vel. angolare}$

ω_z è zero in accordo col fatto che i due segmenti hanno vel. angolare media nulla (hanno vel. angolare uguale in modulo ed opposta in segno).

Un vortice rotazionale (o forzato) non è descrivibile tramite un potenziale di velocità. Un esempio di tale vortice è quello che produce un liquido in una centrifuga posta in rotazione.

attorno al proprio asse oppure quello che produce un liquido fra due dischi in rotazione relativa (nel viscosimetro a dischi rotanti).

Esempio di vortice irrotazionale (o libero) è quello che forma l'acqua allo scorcio di una vasca da bagno o di un lavandino:



$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$$z_s = - \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 r^2 g}$$

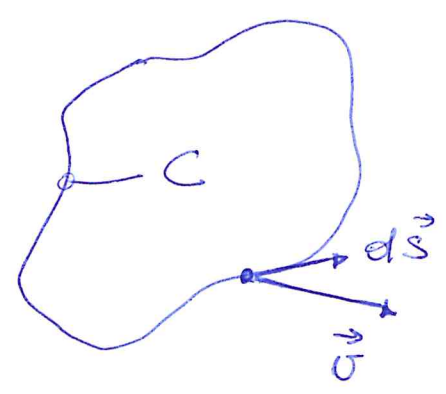
$$| = z_2 - z_1$$

con $\Gamma \triangleq \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s}$ CIRCOLAZIONE

C = curva (o linee) arbitraria chiusa

\oint_C = integrale lungo C

$d\vec{s}$ = spostamento infinitesimo lungo C



$\vec{v} \cdot d\vec{s}$ = comp. tangenziale della velocità (prodotto scalare!)

17

La circolazione è un concetto matematico (più che fisico) comunemente associato ad un vortice. È alla base di uno dei teoremi fondamentali dell'aerodinamica incomprimibile, ovvero il TEOREMA DI KUTTA - JOUKOWSKI (o ŽUKOVSKIJ), che affronteremo più avanti nel corso.

In un moto irrotazionale:

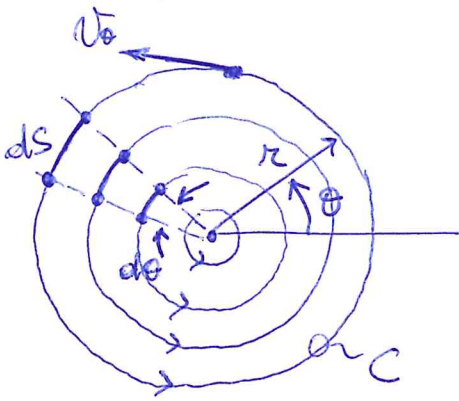
$$\vec{v} = \vec{\nabla} \phi \Rightarrow \vec{v} \cdot d\vec{s} = \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{s} = d\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\Gamma \triangleq \oint_C d\phi = 0 \right]$$

Quindi, solitamente, $\Gamma = 0$ in un campo di moto irrotazionale. Però, se la curva C contiene singolarità al proprio interno, come nel caso di un vortice, di una sorgente o di un pozzo, allora $\Gamma \neq 0$.

Nel caso del vortice irrotazionale: \longrightarrow

$$V_\theta = K/r \Rightarrow \Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{K}{r} \cdot r d\theta = 2\pi K$$



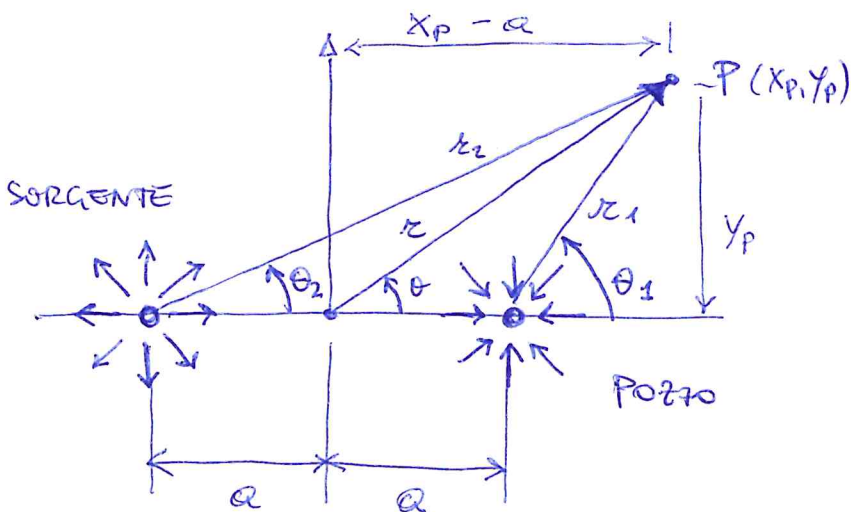
$$\Gamma \neq 0 \text{ se } K \neq 0$$

(K=0 solo in assenza di moto)

N.B. Poiché $\Gamma = 2\pi K \Rightarrow \phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \theta$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \ln r$$

3. DOPPIETTA O DIPOLO



Il moto è prodotto dalla combinazione di una sorgente e di un pozzo di uguale intensità

La funzione di corrente per un pozzo è:

$$\psi_p = -\frac{m}{2\pi} \theta_1 \quad (m > 0)$$

La funzione di corrente per una sorgente è: L^9

$$\psi_s = + \frac{m}{2\pi} \theta_2 \quad (m > 0)$$

La funzione di corrente per una coppia sorgente - pozzo di uguale intensità è:

$$\psi = \psi_s + \psi_p = \frac{m}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \quad [1]$$

Questa "sovrapposizione degli effetti" deriva dal fatto che equazioni lineari alle derivate parziali (quali ad es. l'eq. di Laplace che si ottiene riscrivendo la vorticità in termini di ψ) ammettono come soluzione una combinazione lineare di soluzioni semplici. In altri termini, se ψ_1 e ψ_2 sono due soluzioni dell'eq. allora anche $\psi_3 = \psi_1 + \psi_2$ è anch'esse una soluzione.

Dalla [1]:

$$\theta_1 - \theta_2 = - \frac{2\pi}{m} \cdot \psi$$

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \tan\left(-\frac{2\pi}{m} \cdot \psi\right)$$

$$\text{com: } \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \cdot \tan\theta_2}$$

dalle formule di sommazione per archi.

Dallo schema a pag. 8:

$$\tan\theta_1 = \frac{r \sin\theta}{r \cos\theta - a} \quad \left[\tan\theta_1 = \frac{y_P}{x_P - a} \dots \right]$$

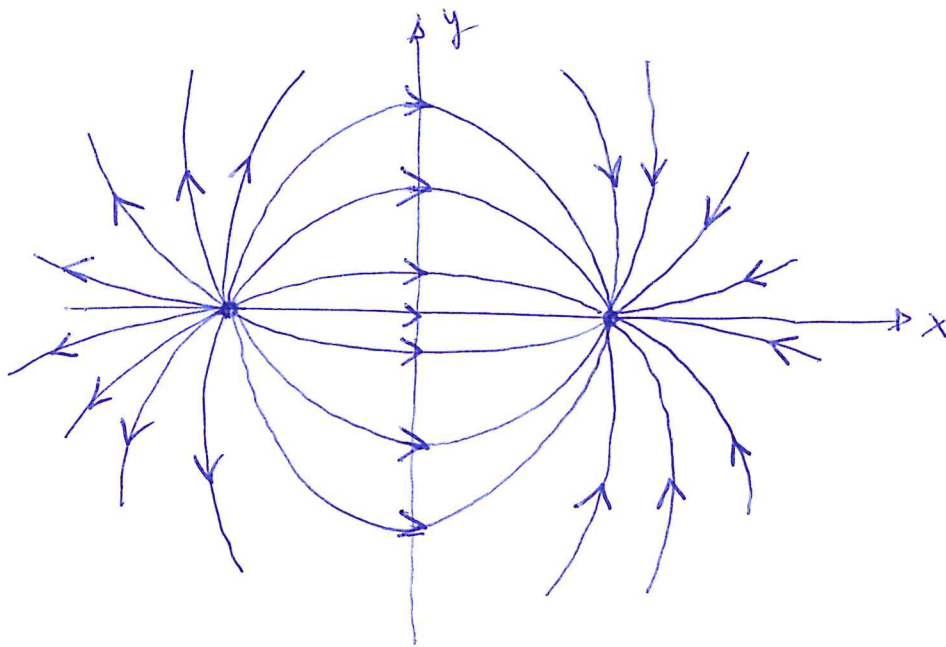
$$\tan\theta_2 = \frac{r \sin\theta}{r \cos\theta + a}$$

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\frac{r \sin\theta}{r \cos\theta - a} - \frac{r \sin\theta}{r \cos\theta + a}}{1 + \frac{r \sin\theta}{r \cos\theta - a} \cdot \frac{r \sin\theta}{r \cos\theta + a}}$$

$$= \frac{2ar \sin\theta}{r^2 - a^2}$$

$$\tan\left(-\frac{2\pi}{m} \cdot \psi\right) = \frac{2ar \sin\theta}{r^2 - a^2}$$

$$\boxed{\psi = -\frac{m}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2ar \sin\theta}{r^2 - a^2} \right)} \quad [2]$$



La cosiddetta DOPPIETTA si ottiene avvicinando la sorgente al pozzo ($a \rightarrow 0$) e contemporaneamente aumentandone la intensità ($m \rightarrow \infty$) in modo da mantenere $m \cdot a = \text{COSTANTE}$.

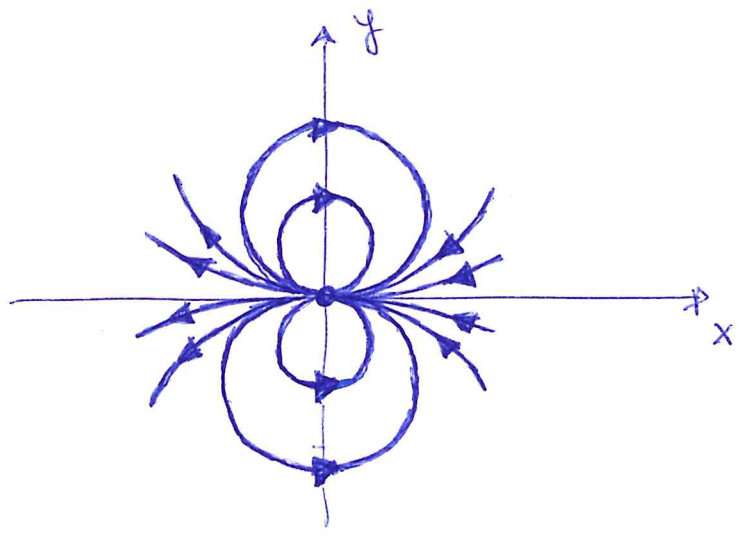
In fatti, se $a \rightarrow 0$: $\tan^{-1} \left(\frac{2az \sin \theta}{z^2 - a^2} \right) \approx \frac{2az \sin \theta}{z^2 - a^2}$

e:

$$\begin{aligned} \psi &= - \frac{m a z \sin \theta}{\pi (z^2 - a^2)} \\ &= - \frac{m a z \sin \theta}{\pi z^2 (1 - \frac{a^2}{z^2})} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \\ &= - \frac{\frac{m a}{\pi z} \cdot \sin \theta}{1} = - K \cdot \frac{\sin \theta}{z} \end{aligned}$$

Con : $K \triangleq \frac{m a}{\pi}$ INTENSITA' DELLA DOPPIETTA

Si trova anche : $\phi = \frac{K \cos \theta}{z}$



LINEE DI FLUSSO DI UNA DOPPIETTA

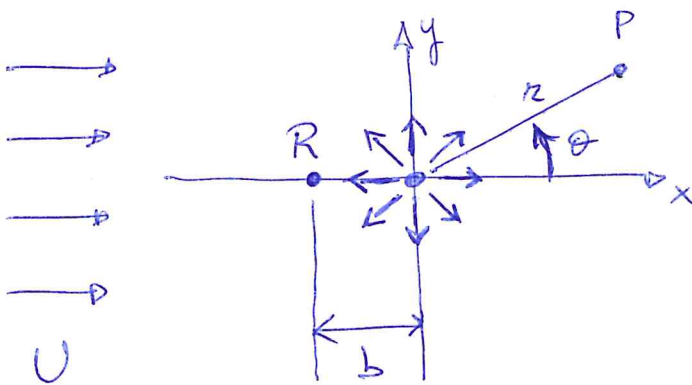
NOTA BENE: Le doppiette, come le sorgenti e i pozzi, non sono entità fisicamente realistiche. Tuttavia, se combinati con altri tipi di moti semplici e potenziale, possono fornire una rappresentazione utile di alcuni campi di moto di interesse pratico. Ad es., la combinazione di un moto uniforme (dove $v_x = U, v_y = 0$ e $\phi = U \cdot x, \psi = U \cdot y$) e di una doppietta può essere utilizzata per rappresentare

il moto attorno ad un cilindro circolare. ¹³

SOVRAPPOSIZIONI DI CAMPI DI MOTO A POTENZIALE

1. SEMI-CORPO

Si consideri la sovrapposizione di una sorgente e di un moto uniforme:



R = punto di ristagno

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_{\text{sorgente}} + \psi_{\text{moto unif.}} \\ &= \frac{m}{2\pi} \theta + \underbrace{U r \sin \theta}_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_{\text{sorgente}} + \phi_{\text{moto unif.}} \\ &= \frac{m}{2\pi} \ln r + \underbrace{U r \cos \theta}_x \end{aligned}$$

La componente radiale della velocità dovuta alle



sorgente è:

14

$$v_r = \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}$$

e produce un punto di ristagno quando:

$$U - v_r = 0 \Rightarrow r = \frac{m}{2\pi U} \equiv b \quad (\theta = \pi)$$

Ord:

$$\psi(r=b; \theta=\pi) = \frac{m}{2\pi} \cdot \pi + U b \sin \pi \stackrel{=0}{\rightarrow}$$

$$= \frac{m}{2}$$

VALORE DI ψ
NEL PUNTO DI

$$b = \frac{m}{2\pi U} \rightsquigarrow$$

$$= \pi b U$$

RISTAGNO

L'espressione della linea di corrente che passa per il punto di ristagno R è pertanto:

$$\pi b U = \frac{m}{2\pi} \theta + U r \sin \theta$$

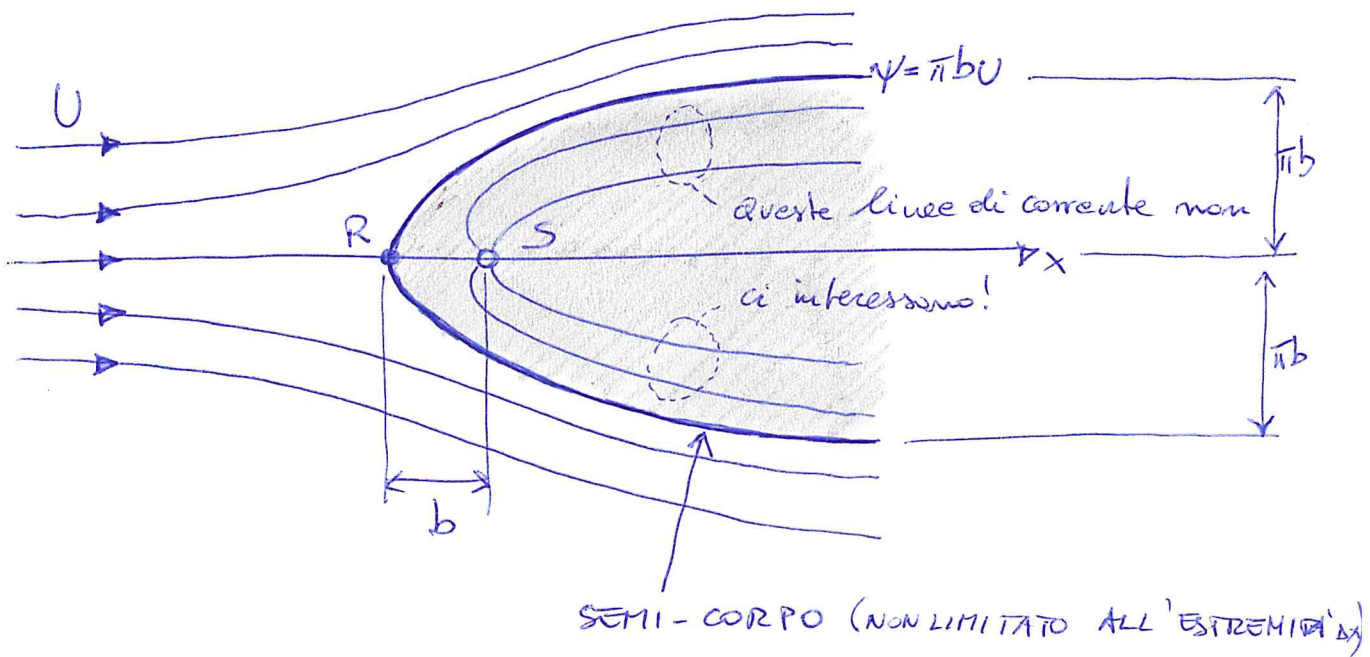
$\underbrace{\hspace{2cm}}_{bU\theta}$

da cui si ricava:

$$r = \frac{b(\pi - \theta)}{\sin \theta}$$

$$[*] \quad \boxed{r = \frac{b(\pi - \theta)}{\sin \theta}} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Il tracciato delle linee di corrente che obbedisce alla $[*]$ e⁻:



Se immaginiamo di sostituire le linee di corrente $\psi = \pi b U$ con un contorno solido, allora la combinazione sorgente + moto uniforme può essere utilizzata per descrivere il moto attorno ad un corpo aerodinamico investito da una corrente uniforme.

Si noti che la singolarità associata alla sorgente è interna al semi-corpo: nel corpo di moto di interesse (fuori dal semi-corpo) non c'è alcuna singolarità.

Consideriamo nuovamente la [*]:

16

$$x = \frac{b(\pi - \theta)}{\sin \theta} \implies y = b(\pi - \theta)$$

$y = r \sin \theta$

Valle anche:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = U \cos \theta + \frac{m}{2\pi r}$$

$$v_\theta = - \frac{\partial \Psi}{\partial r} = - U \sin \theta$$

$$\boxed{v_{\text{Tot}}^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = U^2 + \left(\frac{m}{2\pi r}\right)^2 + \frac{Um}{\pi r} \cos \theta}$$

$\sim b = \frac{m}{2\pi U}$

$$= \boxed{U^2 \left(1 + 2 \frac{b}{r} \cos \theta + \frac{b^2}{r^2} \right)}$$

Avevo il modulo delle velocità, possiamo determinare la pressione in ciascun punto del campo di moto tramite Bernoulli.

Poiché il moto è irrotazionale, l'eq. di Bernoulli può essere scritta tra due punti qualsiasi del campo di moto:

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 = p + \frac{1}{2} \rho v^2$$

con P_0 = pressione (nota) in un punto lontano dal semi-corpo, dove il fluido si muove con vel. U

Si sono ovviamente trascurate le variazioni di quota. Si trova:

$$\begin{cases} p = P_0 + \frac{1}{2} \rho (U^2 - v^2) \\ v^2 = U^2 \left(1 + 2 \frac{b}{z} \cos \theta + \frac{b^2}{z^2} \right) \end{cases}$$

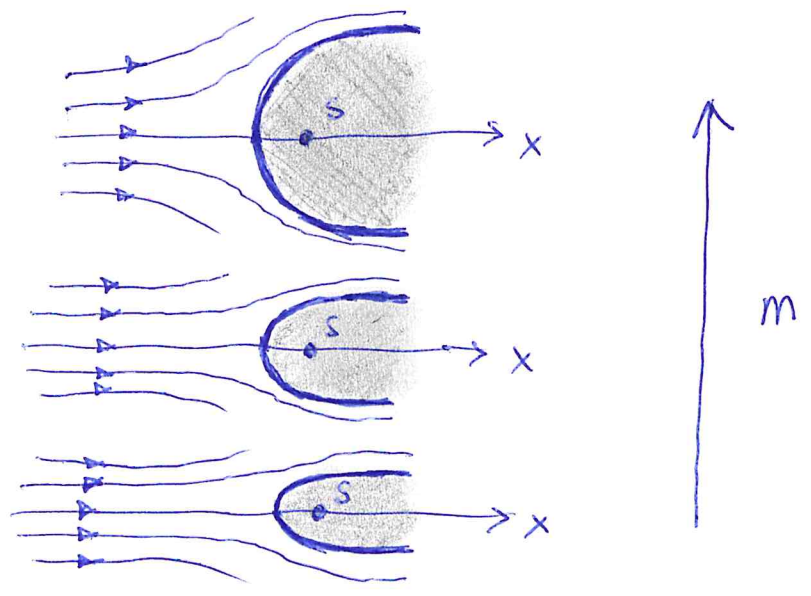
NOTE:

1. Il moto a potenziale attorno ad un semi-corpo fornisce informazioni utili riguardo il moto attorno alla parte anteriore di un corpo investito da una corrente uniforme, ad es. il pilone di un ponte o di un molo.
2. Poiché si è assunto fluido perfetto, non vale la condizione di non-scorrimento sul contorno del semi-corpo.
Vicino al corpo, quindi, il campo di velocità

non è descritto correttamente. Questo perché, in uno strato di fluido vicino al corpo (detto STRATO LIMITE), il campo di velocità è determinato da effetti viscosi di cui il moto a potenziale non tiene conto.

Lo strato limite, però, è solitamente molto sottile (piccolo spessore in direzione ortogonale al corpo) e al suo esterno le espressioni ricavate precedentemente approssimano in maniera soddisfacente le reali distribuzioni di velocità e pressione.

3. Se fissiamo U , allora variando l'intensità della sorgente m possiamo ottenere semi-corpi di diverso spessore:



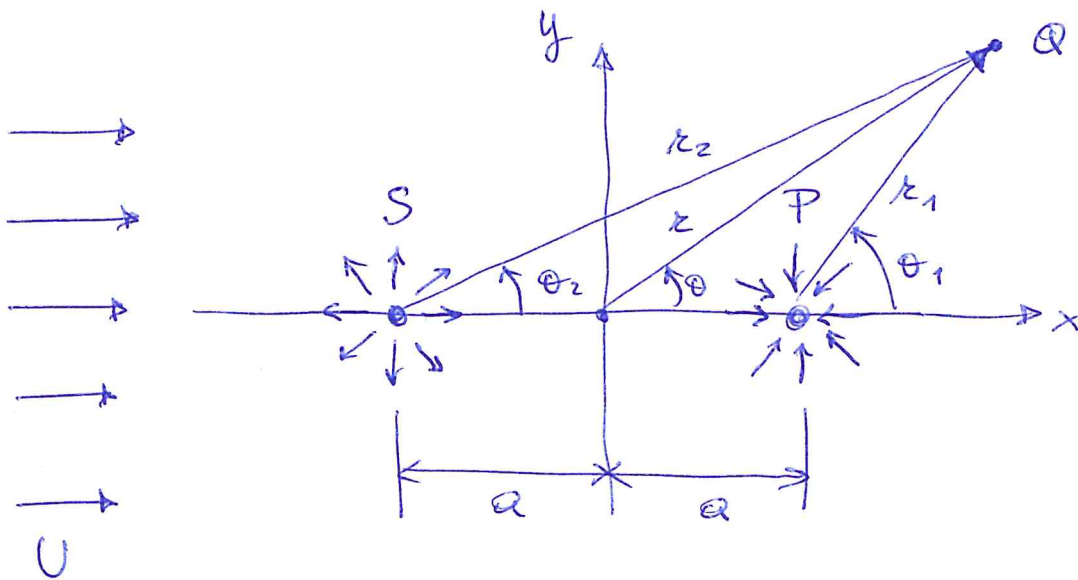
2. OVALI DI RANKINE

19

Il semi-corpo è "spinto" all'estremità di valle rispetto al flusso incidente.

Per studiare un corpo di moto (irrotazionale) attorno ad un corpo "chiuso" e sufficiente aggiungere un pozzo alla combinazione sorgente + moto uniforme.

Il pozzo avrà la stessa intensità della sorgente;



Questa combinazione ha funzione di corrente:

$$\psi = Uz \sin \theta - \frac{m}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) \quad [3]$$

e potenziale di velocità:

$$\phi = Uz \cos \theta - \frac{m}{2\pi} (\ln r_1 - \ln r_2)$$

Richiamando ora l'ep. [2] a pag 10:

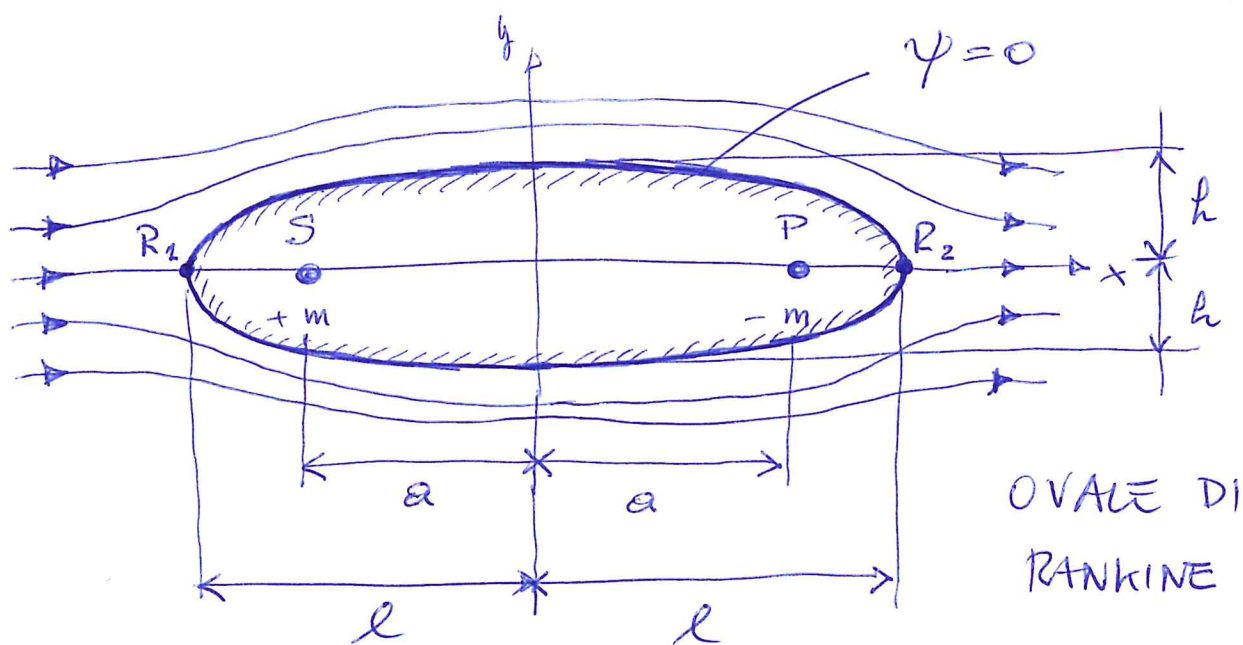
$$\psi = - \frac{m}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2arz \sin\theta}{r^2 - a^2} \right)$$

FUNZIONE DI
CORRENTE PER
UNA DOPPIETTA

si può riscrivere la [3] come :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = \underbrace{Uz \sin\theta}_y - \frac{m}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2arz \sin\theta}{r^2 - a^2} \right) \\ r^2 = x^2 + y^2 \end{array} \right.$$

Le linee di corrente corrispondenti sono :



R_1, R_2 = punti di ristagno.

Le linee di corrente interne all'ovale non sono di interesse pratico (ci interessa il campo di moto esterno all'ovale) e quindi non sono mostrate.

L'ovale di Rankine ha dimensioni $2l \times 2h$. L21
 La lunghezza l del semi-asse maggiore è ricavabile sfruttando il fatto che $2l$ è la distanza tra i due punti di stagnazione, i quali hanno coord. $y=0$ e sono tali per cui $\vec{v}=0$:

$$U = \underbrace{\frac{m}{2\pi}}_{\text{Vel. indotta dal moto uniforme in } R_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{(l-a)}}_{\text{Vel. indotta dalla sorgente in } R_1} - \underbrace{\frac{m}{2\pi} \cdot \frac{1}{(l+a)}}_{\text{Vel. indotta dal pozzo in } R_1}$$

$$\boxed{\frac{l}{a} = \left(1 + \frac{m}{\pi U a} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Allo stesso risultato si arriva imponendo $\vec{v}=0$ in R_2

L'altezza dell'ovale, pari al semi-asse minore dell'ovale, è ricavabile sfruttando il fatto che le estremità coincidono col punto di coordinate $y=h$; $x=0$ che interseca la linea di corrente $\psi=0$



$$\psi(x=0, y=h) = U \cdot h - \frac{m}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2ah \sin \theta}{h^2 - a^2} \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$x^2 = y^2 = h^2$
= 0

$$\frac{2\pi U h}{m} = \tan^{-1} \left(\frac{2ah}{h^2 - a^2} \right)$$

$$\tan \left(\frac{2\pi U h}{m} \right) = \frac{2ah}{\left[\left(\frac{h}{a} \right)^2 - 1 \right] \cdot a^2} = 2 \frac{(h/a)}{\left(\frac{h}{a} \right)^2 - 1}$$

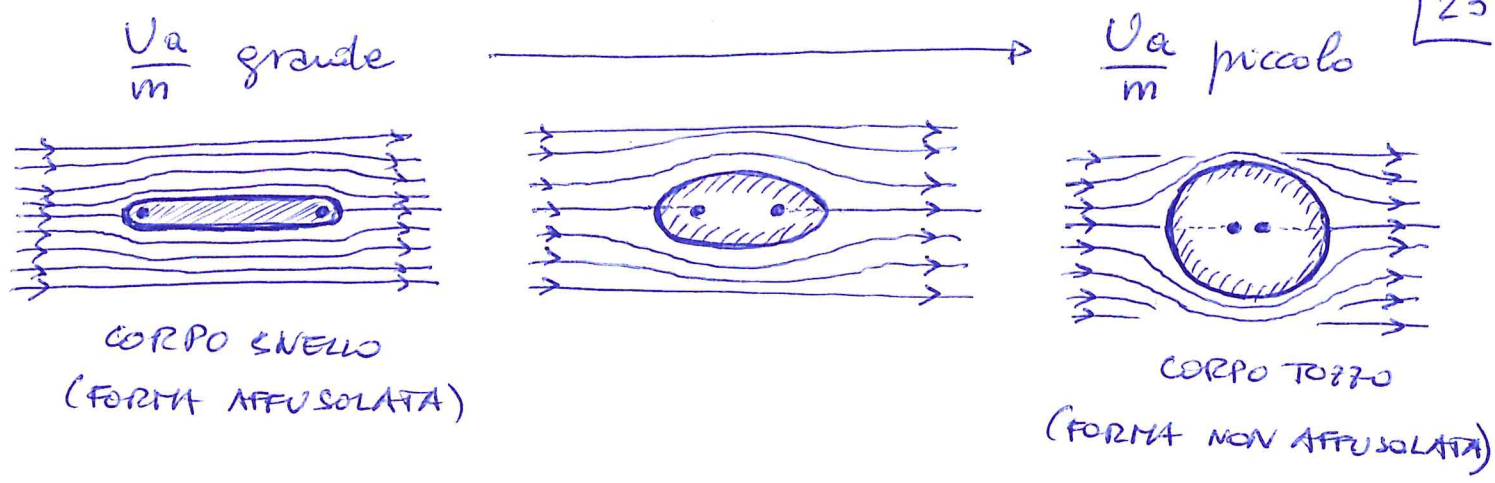
$$\frac{h}{a} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{h}{a} \right)^2 - 1 \right] \tan \left[2 \left(\frac{\pi U a}{m} \right) \cdot \frac{h}{a} \right] \quad [4]$$

Sia l/a che h/a dipendono dal parametro adimensionale $\pi U a / m$.

Anche se fosse dato il valore di $\pi U a / m$, è chiaro che è necessario procedere per tentativi per poter calcolare h/a dalla [4].

Ad ogni modo, variando $U a / m$ è possibile ottenere una grande varietà di forme dell' canale:





NOTA: Per posizioni all'esterno dell'ovale che si trovano a valle del punto ($x=0, y=h$), la pressione sul contorno dell'ovale aumenta con la distanza da tale punto. Tale variazione di pressione produce un gradiente di pressione avverso che, nella realtà, può produrre il distacco della vena fluida dal contorno e generare una scia di basse pressione a valle.

Tale distacco non è contemplato (ovvero non è riproducibile) dalla teoria del moto potenziale, che quindi è applicabile solo a corpi snelli. In generale, l'ovale di Rankine approssima in modo ragionevole la distribuzione delle velocità solo

fuori dallo strato limite e la distribuzione] 24
 ne della pressione solo nella parte anteriore
 del corpo di moto (dove non si verifica il
 distacco della vena fluida).

CASO PARTICOLARE : distanza $\rightarrow 0$ tra pozzo e sorgente

In questo caso, la combinazione dei corpi di moto
 indotti da pozzo e sorgente coincide con quello
 indotto dalle doppietta, che è descritto da:

$$\psi_{\text{dopp.}} = - \frac{K \sin \theta}{r}$$

$$\phi_{\text{dopp.}} = \frac{K \cos \theta}{r}$$

Quando la doppietta si combina con un moto
 uniforme, l'ovale di Rankine assume la forma
 di un cerchio (ovvero della sez. 2D di un
 cilindro circolare) e:

$$\psi = \psi_{\text{moto unif.}} + \psi_{\text{dopp.}} = U r \sin \theta - \frac{K \sin \theta}{r}$$

$$\phi = \phi_{\text{moto unif.}} + \phi_{\text{dopp.}} = U r \cos \theta + \frac{K \cos \theta}{r}$$

Affinché la funzione di corrente rappresenti veramente il moto irrotazionale di un fluido attorno a un cilindro, deve risultare:

$$\psi = 0 \quad \text{per } r=a \quad (\text{con } a = \text{raggio del cilindro})$$

ovvero:

$$U \cdot r - \frac{K}{r} = 0 \Rightarrow \boxed{K = U \cdot r^2 = U \cdot a^2}$$

da cui:

$$\psi = U r \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta \quad \checkmark$$

e:

$$\phi = U r \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta \quad \checkmark$$

Le componenti di velocità risultano:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta \quad \checkmark$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = - \frac{\partial \phi}{\partial r} = - U \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta \quad \checkmark$$

$$\text{con } v_r(\theta, r=a) = 0$$

$$v_\theta(\theta, r=a) = - 2U \sin \theta$$

sulla superficie del cilindro.

Le equazioni appena ricavate coincidono con 26
quelle relative al moto potenziale attorno ad
un cilindro circolare.

3. MOTO ATTORNO AD UN CILINDRO IN ROTAZIONE

Per studiare il campo di moto irrotazionale
attorno ad un cilindro in rotazione è sufficiente
aggiungere un vortice libero al campo di moto
prodotto dalla combinazione doppietta + moto unif.
attorno al cilindro stesso.

In questo caso:

$$\psi = Ux \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right) \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

↕
(vedi pag. 8)

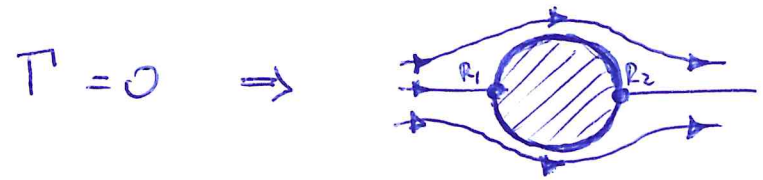
$$\phi = Ux \left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) \cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

Poiché le linee di corrente di un vortice libero
sono tutte circolari, la circonferenza $r=a$
(coincidente con la superficie del cilindro) è
ancora una linea di flusso.

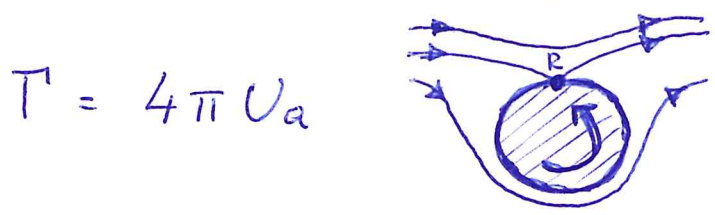
La velocità tangenziale v_θ sulla superficie del cilindro diventa:

$$v_\theta = - \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=a} = - 2U \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

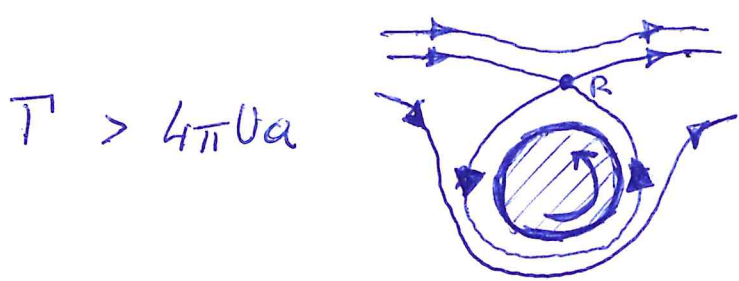
Verificando l'intensità della circolazione Γ , ovvero la velocità di rotazione del vortice libero, è possibile ottenere un numero virtualmente infinito di campi di moto differenti:



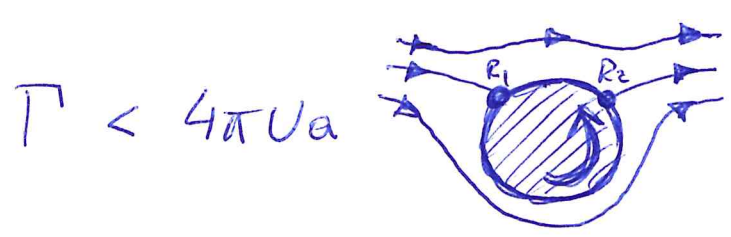
Due punti di ristagno distinti ($\theta = 0, \pi$)



"Due" punti di ristagno coincidenti



Un punto di ristagno esterno al cilindro



Due punti di ristagno distinti ($\theta \neq 0, \pi$)

I punti di ristagno verificano la condizione:

$$v_\theta = 0 \Rightarrow \Gamma = 4\pi Ua \cdot \sin \theta_{stg}$$

Portata :

$$\Gamma = 0 \Rightarrow \Theta_{\text{stag}} = 0 \quad \text{o} \quad \pi$$

$$\Gamma = 4\pi Ua \Rightarrow \Theta_{\text{stag}} = \frac{\pi}{2} \quad (\times \text{ rotaz. antioraria})$$

$$\Gamma > 4\pi Ua \Rightarrow \text{siu } \Theta_{\text{stag}} > 1 \quad \text{IMPOSSIBILE}$$

(il punto di ristagno si trova lontano dal cilindro, nel flusso esterno).

E' interessante calcolare l'andamento della pressione e le relative forze ad esso associate:

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 = P_s + \frac{1}{2}\rho \left(-2U \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2$$

da Bernoulli, con P_s = Pressione sulla superficie del cilindro. Si trova:

$$P_s = P_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \left(1 - 4\sin^2\theta + \frac{2\Gamma \sin\theta}{\pi a U} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2 U^2} \right)$$

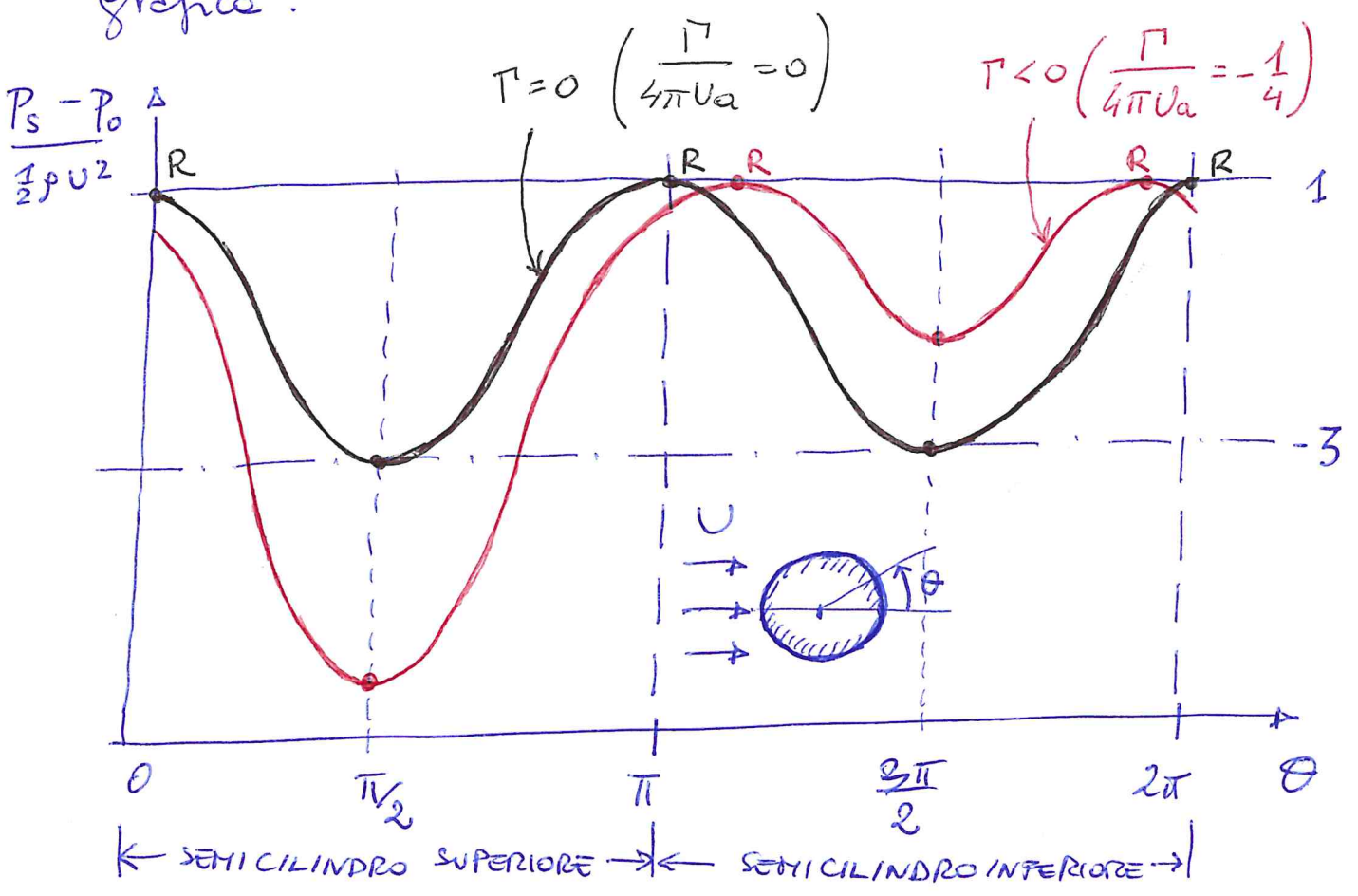
$$F_x = - \int_0^{2\pi} P_s \cdot a \cos\theta \, d\theta = 0 \quad \text{FORZA DI ATTRITO PER UNITA' DI LUNGHEZZA (P.U.L.)}$$

Scopriamo che, pur in condizioni di moto irrotazionale, la rotazione del cilindro produce una portanza (o lift):

$$(F_L =) L = -\rho U \Gamma \quad [5]$$

Il segno negativo dice che, per $U > 0$ e $\Gamma > 0$ (rotazione antioraria), la direzione della portanza è verso il basso (sua verso l'alto se $\Gamma < 0$, ovvero per rotazione oraria).

Vediamo da dove nasce la portanza in forma grafica:



← SEMICILINDRO SUPERIORE → ← SEMICILINDRO INFERIORE →

L'eq. [5] fornisce la portanza per unità di lunghezza che si sviluppa su qualsiasi corpo di forma bidimensionale in una corrente di fluido perfetto che si muove in moto uniforme, con circolazione determinata attorno ad una qualsiasi curva chiusa contenente il corpo. È pertanto una forza più "generale" di quanto si potrebbe pensare avendo ricavato per il caso specifico di cilindro in rotazione.

La sua formulazione generalizzata è detta LEGGI DI KUTTA - JOUKOWSKI e viene comunemente usata per determinare la portanza sui profili alari.

* AKA FLETTNER SHIP

CURIOSITA' : EFFETTO MAGNUS E NAVI A ROTORE*

Effetto Magnus: è il fenomeno per cui una sfera o un cilindro che ruota attorno al proprio asse sviluppa una forza \perp alla direzione della corrente fluida nella quale è immerso. Tale effetto viene sfruttato dalle cosiddette navi a rotore.