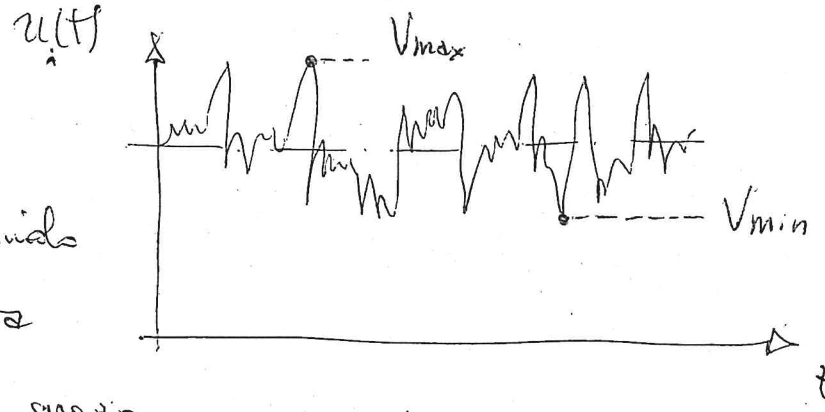
DESCRIZIONE STATISTICA DI UN SEGNALE TURBOLENTO

Consideriamo un caso semplice di flusso turbolento, ad es. il flusso di un gas (es. aria) o di un liquido (es. acqua) in una tubazione o in un canale piano

Supponendo di poter inserire nel flusso una sonda per la misurazione della velocità del fluido nel tempo (e nella posizione della sonda), troveremo il seguente andamento:



$u_i(t)$ = componente di velocità del fluido ad una fissata posiz. $\vec{x}$ nello spazio

Analogo andamento si trova per u_i al variare della posizione di misura (identificata dal vettore $\vec{x}$) fissato l'istante temporale in cui si esegue la misura

In generale il vettore velocità del fluido $\vec{u}(\vec{x},t)$ si

Comporta come una VARIABILE CASUALE (o random) dal punto di vista statistico.

Una variabile casuale è completamente caratterizzata dalla sua PDF (Probability Distribution Function).

Per definire la PDF bisogna innanzitutto definire la CDF (Cumulative Distribution Function):

$$\boxed{F(V) \triangleq p\{u_i < V\}} \quad (1)$$

ovvero la probabilità p che si verifichi un certo evento (ad es. che u_i sia minore di un certo valore V nello spazio degli eventi).

La PDF è definita come:

$$\boxed{f(V) \triangleq \frac{dF(V)}{dV} \geq 0} \quad (2)$$

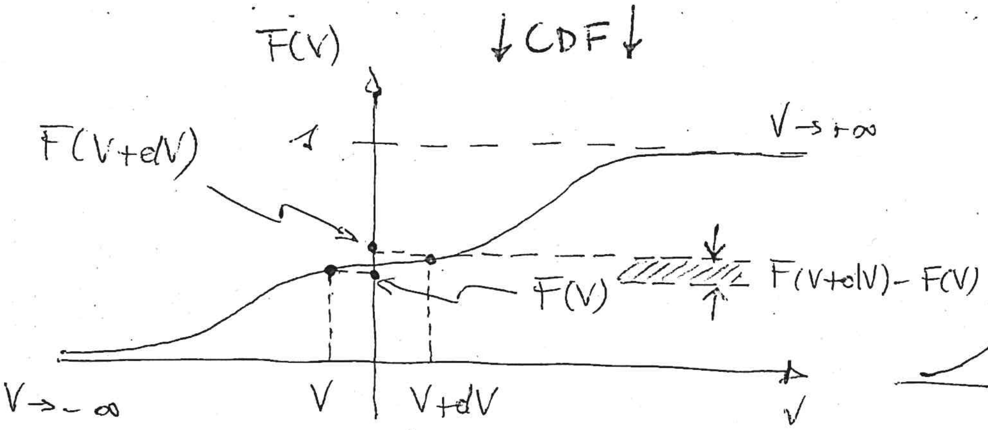
Con $\int_{-\infty}^{+\infty} f(V)\,dV = 1$.

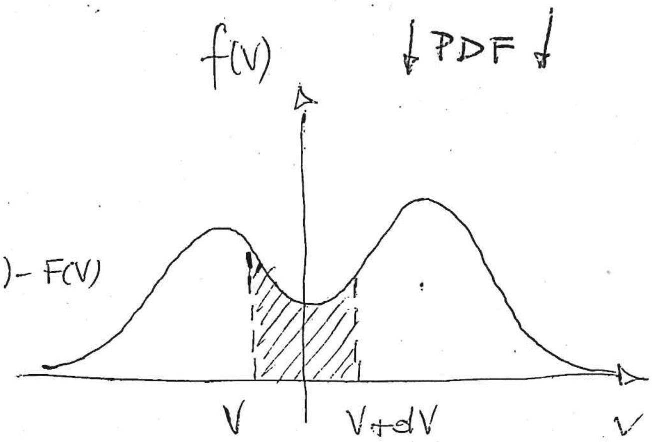
SIGNIFICATO DELL'EQ. (2) : $f(V) \triangleq \dfrac{dF(V)}{dV} = \dfrac{F(V+dV)-F(V)}{dV}$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{F(V+dV) - F(V)} = f(V)\,dV$$

$$p\{V \le u_i < V+dV\} = \underbrace{p\{u_i < V+dV\}}_{F(V+dV)} - \underbrace{p\{u_i < V\}}_{F(V)}$$

ESEMPIO:



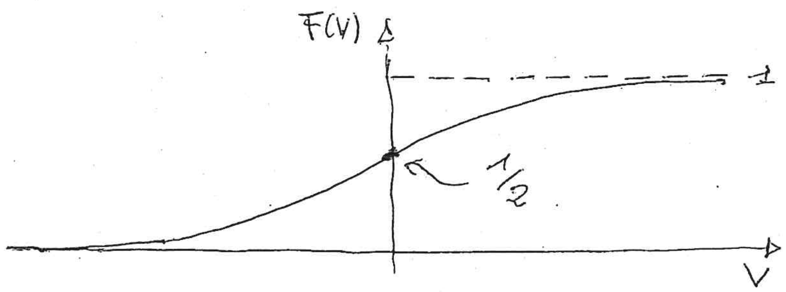


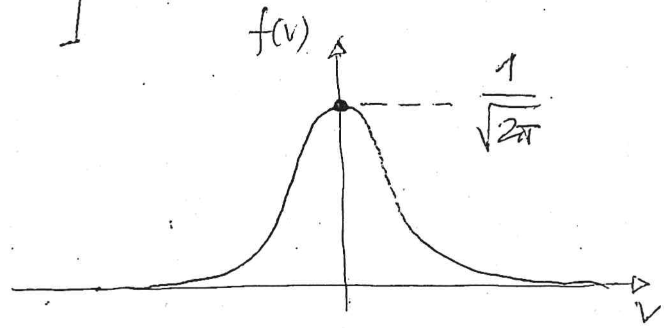
Nel grafico della CDF, $p\{V \le u_i < V+dV\}$ è una differenza, nel grafico della PDF è un integrale.

PDF "FAMOSE":

1. DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA

$$f(V) = \frac{1}{\sigma_u\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\,\frac{(V - \langle u_i \rangle)^2}{\sigma_u^2}\right]$$

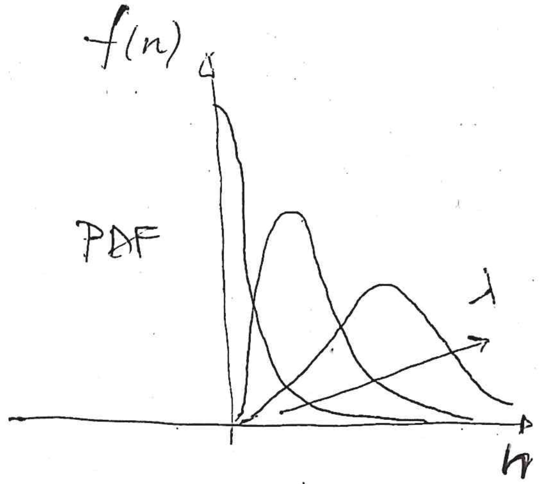




4]

2. DISTRIBUZIONE DI POISSON

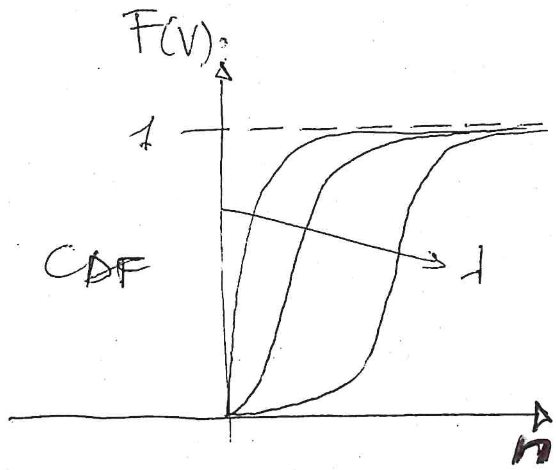
$$f(n) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$$



λ = n° medio di eventi che si verificano successivamente ed in maniera indipendente fra di loro in un dato intervallo di tempo (λ è anche la varianza)

n = n° di eventi (completamente casuali ovvero indipendenti fra loro) che si verificano in tale intervallo di tempo

effettivo



f(n) può rappresentare il n° di telefonate ricevute in una mattina da un centralino, il n° di clienti susseguitisi ad uno sportello in una giornata, il n° di auto transitate ad un casello autostradale in un pomeriggio, il n° di particelle emesse in un millisecondo da un corpo radioattivo, la distribuzione di particelle in un flusso bifase etc. etc.

La PDF rappresenta una probabilità per unità di "variazione" dV nello spazio degli eventi (detto anche spazio campione). Da qui il termine "density" usato in alternativa a "distribution".

Se due variabili casuali hanno la medesima PDF allora tali variabili si dicono IDENTICAMENTE DISTRIBUITE o equivalentemente STATISTICAMENTE IDENTICHE.

A partire dal concetto di PDF si possono definire i vari momenti statistici:

MEDIA $\langle u_i \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} V\, f(V)\, dV$ Momento statistico di ordine 1

VARIANZA $\langle u_i^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (V - \langle u_i \rangle)^2 f(V)\, dV$ Mom. stat. ordine 2

Con $V - \langle u_i \rangle$ = fluttuazione di u_i

DEVIAZIONE STD (RMS) $\sigma_u = \sqrt{\langle u_i^2 \rangle}$

6

ASIMMETRIA (SKEWNESS)

Mom. stat. ordine 3

$$\hat{\mu}_3 \triangleq \frac{\langle u_i^3 \rangle}{\sigma_u^3} = \frac{1}{\sigma_u^3} \int_{-\infty}^{+\infty} (V - \langle u_i \rangle)^3 f(V)\, dV$$

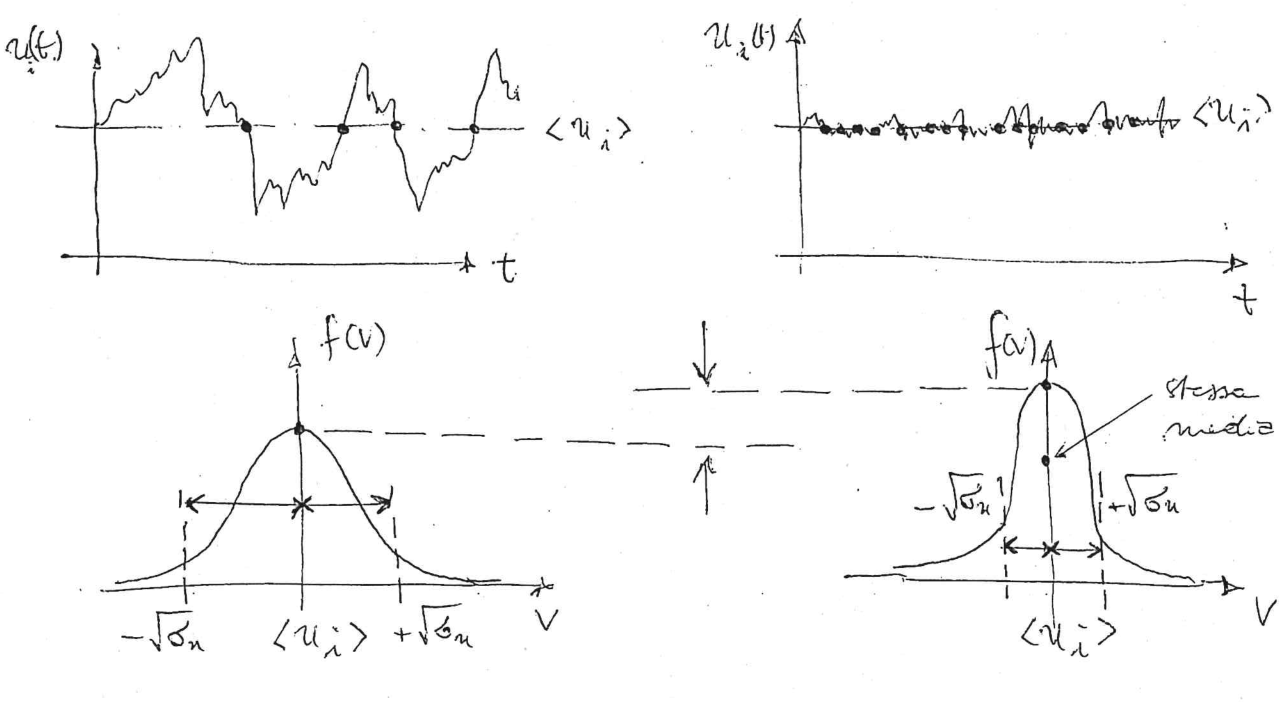
CURTOSI (FLATNESS)

Mom. stat. ordine 4

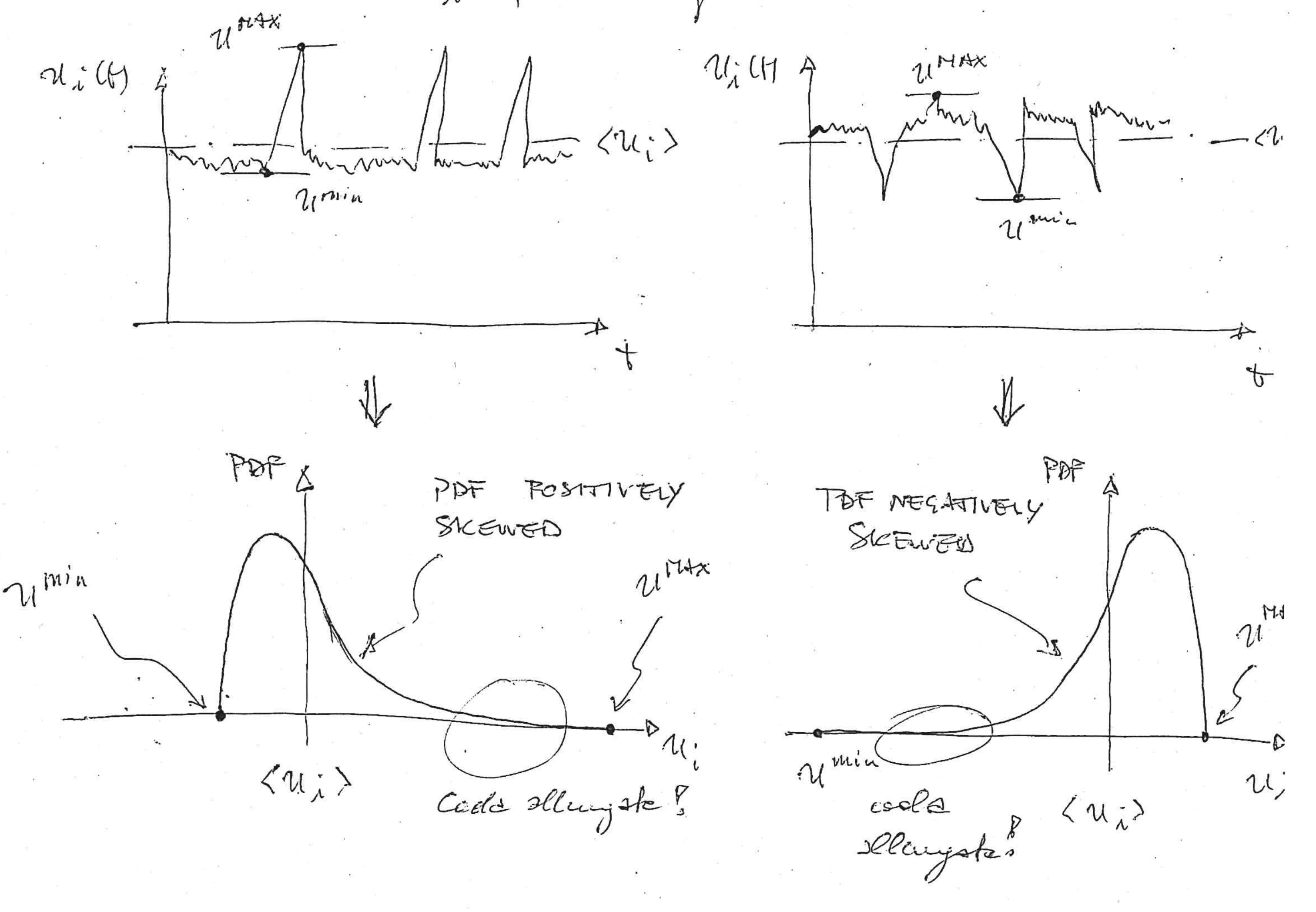
$$\hat{\mu}_4 \triangleq \frac{\langle u_i^4 \rangle}{\sigma_u^4} = \frac{1}{\sigma_u^4} \int_{-\infty}^{+\infty} (V - \langle u_i \rangle)^4 f(V)\, dV$$

SIGNIFICATO DEI MOMENTI STATISTICI:

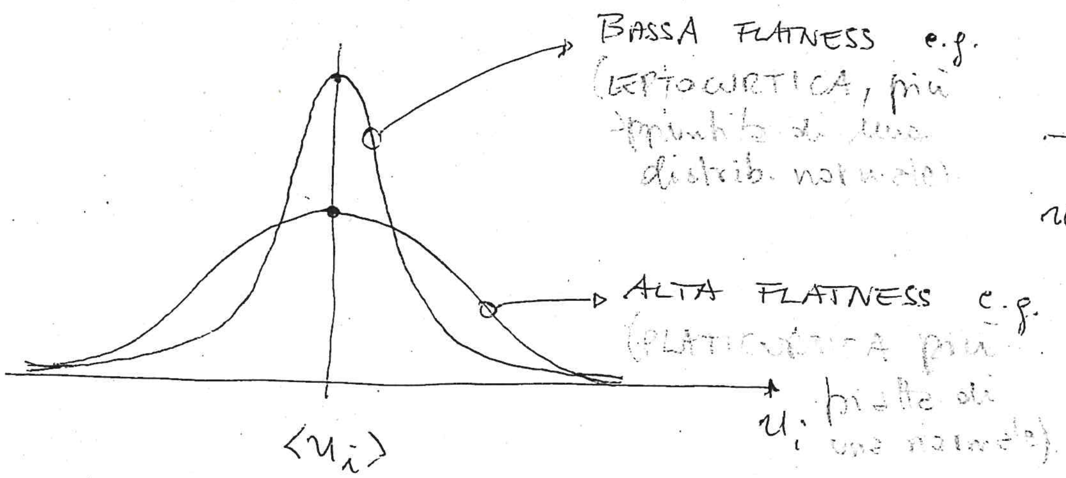
- MEDIA: indicazione sulla dislocazione dei valori nello spazio dei valori
- RMS: misura la <u>dispersione</u> dei valori rispetto alla media nello spazio dei campioni. Minore è la dispersione e più concentrati sono i valori attorno alla media:

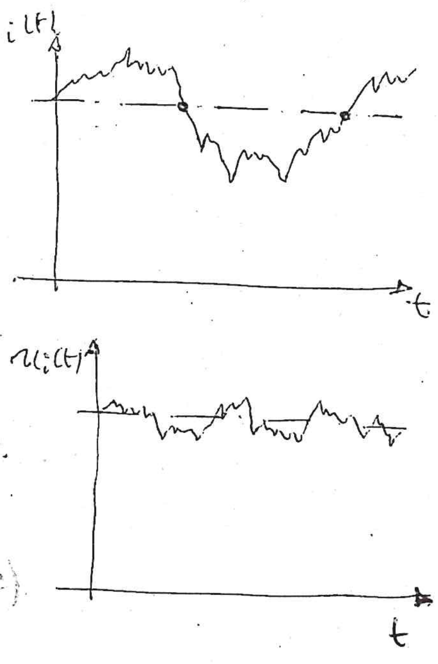


• SKEWNESS: se positiva indica che i valori campionati, pur attestandosi attorno ad un valore medio $\langle u_i \rangle$, si distribuiscono preferenzialmente al di sopra di $\langle u_i \rangle$; se negativa al di sotto:



• FLATNESS: misura il peso delle code della PDF, ovvero dei valori campionati che si trovano agli estremi della PDF (di solito rappresentativi di eventi rari, poco probabili).





Ulteriori strumenti statistici utili a caratterizzare un segnale turbolento sono l'AUTOCOVARIANZA ed il COEFF. DI AUTOCORRELAZIONE:

AUTOCOVARIANZA $\boxed{R_{u_i}(s) \triangleq \langle u_i'(t) \cdot u_i'(t+s) \rangle}$

COEFF. DI AUTOCORR. $\boxed{\rho_{u_i}(s) \triangleq \dfrac{R_{u_i}(s)}{R_{u_i}(0)} = \dfrac{\langle u_i'(t) \cdot u_i'(t+s) \rangle}{\langle u_i'^2(t) \rangle}}$

Il coeff. di autocorrelazione rappresenta la correlazione tra il segnale turbolento al tempo t con sé stesso al tempo $t+s$, con s che viene man mano incrementato.

DERIVA DA SCHWARTZ INEQUALITY
$\langle u_i(t) \cdot u_i(t+s) \rangle \leq \langle u_i^2(t) \rangle^{1/2} \langle u_i^2(t+s) \rangle^{1/2}$

Risulta ovviamente: $\rho_{u_i}(s=0) = 1$ e $\boxed{|\rho_{u_i}(s)| \leq 1}$

Se il segnale di cui si calcola la correlazione è periodico allora anche $\rho(s)$ avrà la stessa periodicità:

$$u_i(t) = u_i(t+T) \Rightarrow \rho(s) = \rho(s+T)$$

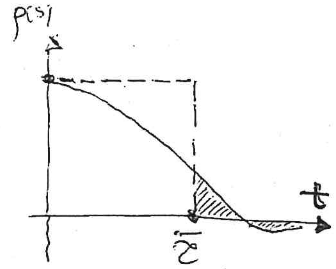
Tipicamente, però, i fenomeni turbolenti sono caratterizzati da segnali non periodici e $\rho(s)$ tende a diminuire all'aumentare di s.

NOTA: la definizione data per $\rho(s)$ vale nel caso di segnale STATISTICAMENTE STAZIONARIO, caratterizzato da statistiche che non dipendono dal particolare istante al quale vengono calcolate.

A partire dal coefficiente di autocorrelazione possiamo definire altri due osservabili statistici che hanno un importante significato fisico:

TEMPO SCALA INTEGRALE

$$\boxed{\overline{\tau} \triangleq \int_0^\infty \rho(s)\, ds}$$



$\overline{\tau}$ fornisce una misura approssimata dell'intervallo di tempo durante il quale un dato processo (nel nostro caso un segnale di velocità turbolento) rimane correlato con se stesso, ovvero misura l'intervallo di tempo necessario al segnale per decorrelarsi.

SPETTRO DI ENERGIA (FREQUENCY SPECTRUM)

$$\boxed{E(\omega) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R(s)\, e^{-i\omega s}\, ds}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} R(s) \cos(\omega s)\, ds$$

con ω = frequenza in Hz (dato un segnale turbolento $u_i(t)$ misurato nell'intervallo $[0, T]$ allora $\omega = \frac{2\pi}{T} \cdot n$ con n = intero).

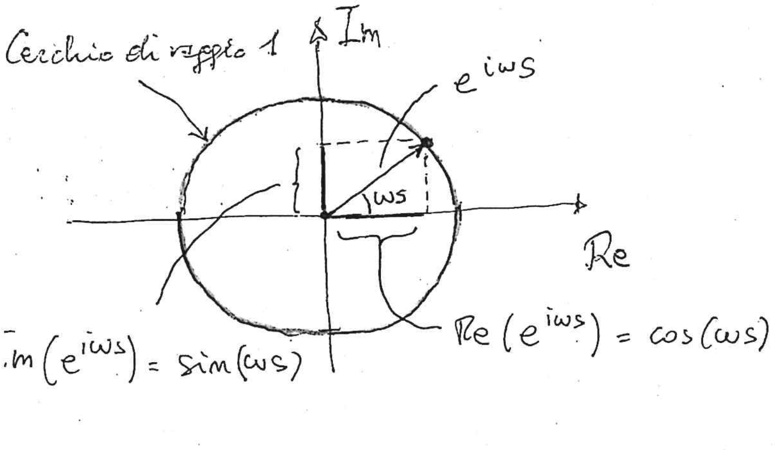
In pratica $E(\omega)$ e' pari alla <u>trasformata di Fourier</u> di $R(s)$:

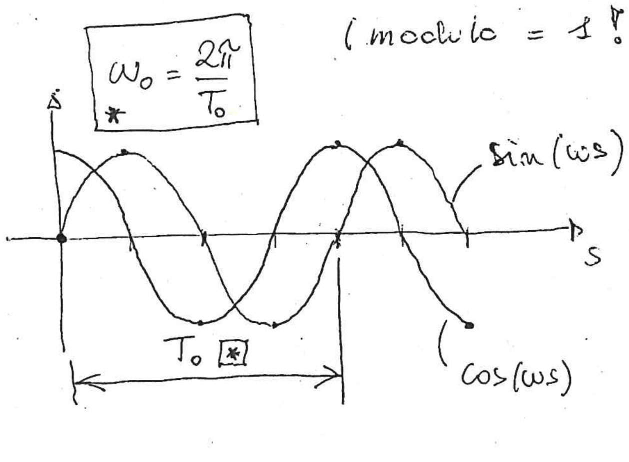
$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \Rightarrow f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\, e^{i\omega t}\, dt$$

Risulta pertanto:

$$\boxed{R(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega)\, e^{i\omega s}\, d\omega}$$

con $\boxed{e^{i\omega s} = \cos(\omega s) + i \sin(\omega s)}$ ESPONENZIALE COMPLESSO (modulo = 1!)





Dalla definizione di $E(\omega)$ discende:

$$E(\omega=0) = E_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty R(s)\,ds \Rightarrow \int_0^\infty R(s)\,ds = \pi \cdot E_0$$

Poichè:

$$\boxed{\overline{\tau}} = \int_0^\infty \rho(s)\,ds = \int_0^\infty \frac{R(s)}{R(0)}\,ds = \frac{1}{R(0)}\int_0^\infty R(s)\,ds = \boxed{\frac{\pi E_0}{R(0)}}$$

con $\boxed{R(0)} = \langle u_i^2(t)\rangle$ = VARIANZA $= \boxed{\int_0^\infty E(\omega)\,d\omega}$

ovvero:

$$\underbrace{E_0}_{\text{SPETTRO A FREQUENZA ZERO}} \propto \frac{R(0)}{\pi}\cdot \underbrace{\overline{\tau}}_{\text{TEMPO SCALA INTEGRALE}}$$

NOTA SU ESPONENZIALE COMPLESSO: la trasformata di Fourier consente di rappresentare una certa funzione matematica o distribuzione, ad esempio definita nel tempo (tipicamente è così), in una nuova funzione il cui argomento non è più il tempo bensì una frequenza. Questa nuova funzione è detta appunto SPETTRO DELLE FREQUENZE della funzione di partenza.

Il nome deriva dal fatto che possiamo immaginare la nostra funzione di partenza (ad es. il segnale di velocità turbolenta o l'autocorrelazione del segnale di velocità) in una somma di sinusoidi con frequenze (ed in generale ampiezze e fasi) diverse; la frequenza più bassa è detta ARMONICA FONDAMENTALE perché è quella che pesa di più nella somma, le frequenze più alte (multiple di quella fondamentale) sono dette ARMONICHE SECONDARIE e rappresentano contributi via via sempre meno importanti alla ricomposizione del segnale.

$$\boxed{w_0 = \frac{2\pi}{T_0}}$$

$$\boxed{w_n = \frac{2\pi m}{T_0} \text{ con } m = n° \text{ intero}}$$

Teoricamente, le sinusoidi in cui viene scomposto il segnale posso essere infinite. Nella pratica il numero è finito, ovvero si usa una versione discreta della trasformata di Fourier (con Σ invece che $\int \dots$). Questo implica che anche le frequenze associate alle sinusoidi sono finite:

$$\boxed{w_n = \frac{2\pi m}{T_0}} \quad \text{con} \quad m \in [0, N]$$

Ciascuna di queste frequenze ha associato un COEFFICIENTE DI FOURIER tipicamente indicati con a_n e b_n, per cui risulta:

TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA

$$\boxed{f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \right]}$$

Con $\omega_n = \frac{2\pi n}{T_0}$. Il coeff. a_0 è quello associato alla frequenza fondamentale $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ($n=1$!)

ed è definito come:

$\omega_n = n \cdot \omega_0$!

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t)\, dt$$

ovvero è il valor medio di $f(t)$ sull'intervallo di periodicità $[0, T_0]$.

Gli altri coeff. sono definiti come:

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} f(t) \underbrace{\cos(\omega_n t)}_{Re(e^{i\omega_n t})} dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t) \underbrace{\sin(\omega_n t)}_{Im(e^{i\omega t})} dt$$

e formano un coefficiente complesso

$$c_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t)\, e^{-i\omega_n t}$$

da cui deriva:

$$\boxed{f(t) = \sum_n c_n e^{i\omega_n t}}$$

— o —

Le statistiche definite finora per un segnale tempo-dipendente $u_i(t)$ si possono ovviamente definire anche per un segnale spazio-dipendente, $u_i(x_j)$. Basta che il segnale sia STATISTICAMENTE OMOGENEO, ovvero che le sue statistiche non dipendono dalla particolare posizione x_j scelta per calcolarle (ad es. nel canale le direzioni statisticamente omogenee sono quelle // alle pareti mentre è disomogenea la direzione ⊥ alle pareti!)

Fissato quindi l'istante di tempo t al quale si calcola la statistica lungo la direzione x_j:

AUTOCOVARIANZA : $R(r) = \langle u_i'(x_j)\, u_i'(x_j + r)\rangle$

COEFF. AUTOCORREL $\rho(r) = R(r) / \langle u_i'^2(x_j)\rangle$

SPETTRO DI ENERGIA $E(k_j) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(r)\, e^{-ik_j r}\, dr$

con $\boxed{K_j = \frac{2\pi n}{L_j}}$ NUMERO D'ONDA $[m^{-1}]$

Il numero d'onda è, per lo spazio, l'equivalente della frequenza nel tempo: è il reciproco della lunghezza d'onda.
In questo caso lo spettro di energia trasforma la nostra funzione avente per argomento una certa direzione nello spazio (x_j) in una funzione il cui argomento è il n° d'onda, ovvero in una somma di sinusoidi con n° di oscillazioni per unità di lunghezza variabile.
Come per la frequenza, avremo un n° d'onda più piccolo pari a $K_{j,0} = \frac{2\pi}{L_j} = \frac{1}{\lambda_j}$ (che corrisponde alla lunghezza d'onda di una sinusoide che compie una sola oscillazione nell'intervallo $[0, 2\pi]$) e n° d'onda via via crescenti pari a K_j. Ad esempio: $n = 2 \Rightarrow K_{j,1} = \frac{4\pi}{L_j}$ (e la sinusoide oscilla due volte nell'intervallo $[0, 2\pi]$).

ESEMPIO DI CALCOLO DEI NUMERI D'ONDA NEL CASO DEL CANALE PIANO

(calcolo possibile solo nelle direzioni parallele alla parete)

$$L_x = 4\pi h \Rightarrow K_x = \frac{2\pi n}{L_x} = \frac{1}{2h} n \Rightarrow K_x^+ = K_x \cdot h$$

$$\Rightarrow \boxed{K_x^+ = \frac{n}{2}} \quad \text{con} \quad 1 \leq n \leq N_x$$

$$L_y = 2\pi h \Rightarrow K_y = \frac{2\pi n}{L_y} = \frac{1}{h} n \Rightarrow K_y^+ = K_y \cdot h$$

$$\Rightarrow \boxed{K_y^+ = n} \quad \text{con} \quad 1 \leq n \leq N_y$$

Nel caso della simulazione da cui sono presi i dati abbiamo $N_x = N_y = 32$ ovvero:

$$K_x^+ = 0.5,\ 1,\ 1.5,\ \ldots,\ 16$$

$$K_y^+ = 1,\ 2,\ \ldots,\ 32$$

Per quanto riguarda il calcolo della correlazione di un segnale turbolento, questo può essere esteso al caso di due distinti segnali $u_i(t)$ e $v_j(t)$ (ad esempio due segnali di velocità misurati nella stessa posizione da una sonda ma in esperimenti condotti in giornate diverse o in orari diversi). In questo caso si parla di:

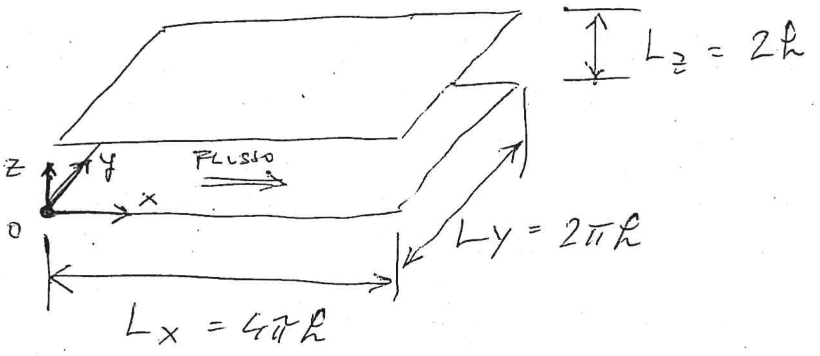
$$\text{COVARIANZA} \qquad R_{ij}(t) = \langle u_i'(t) \cdot v_j'(t) \rangle$$

Se u_i e v_j rappresentano due componenti di velocità del fluido (ad es. u_i è la comp. di velocità in direz. del flusso medio e v_j è la comp. di velocità in direzione normale alla parete) avremo che $R_{ij}(t)$ equivale ad uno degli STRESS DI REYNOLDS:

$$\tau^{TOT} = \underbrace{\mu \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial z}}_{\text{COMPONENTE VISCOSA DELLO SFORZO DI TAGLIO}} - \rho \underbrace{\underbrace{\langle u_x' u_z' \rangle}_{\text{COVARIANZA}}}_{\text{COMPONENTE DELLO SFORZO DI TAGLIO TURBOLENTA (STRESS DI REYNOL}}$$

DETTAGLI PRATICI ESERCITAZIONE

- Web: 158.110.32.35/download/FT-STATISTICHE



$Re_* = 150$

$h = 0.02\ m$

$\nu = 1.57 \cdot 10^{-5}\ m/s$

- $Re_* = \dfrac{u_* \cdot h}{\nu} \Rightarrow u_* = 0,11775\ m/s$

$\overline{\langle u_x \rangle} \simeq 1,7\ m/s \Longrightarrow Re_b = \dfrac{\overline{\langle u_x \rangle}\, h}{\nu} \simeq 2200$

$D_H = \dfrac{4A}{P} = \dfrac{4 \cdot \cancel{L_y} \cdot L_z}{2 \cdot \cancel{L_y}} = 4h \Rightarrow \underline{\underline{Re_H \simeq 8800 > 4000}}$

- $L_x^+ = \dfrac{L_x \cdot u_\tau}{\nu} = 4\pi \dfrac{h u_\tau}{\nu} = 4\pi Re_* \simeq 1886$ w.u.

$L_y^+ = \dfrac{L_y \cdot u_\tau}{\nu} = 2\pi \dfrac{h u_\tau}{\nu} = 2\pi Re_* \simeq 943$ w.u.

$L_z^+ = 2 Re_* = 300$ w.u.

Quindi il generico punto P nel volume occupato dal fluido è localizzato dalla terna i, j, k ed ha coordinate $x_P^+(i,j,k) \in [0, 1886]$, $y_P^+(i,j,k) \in [0, 943]$ e $z_P^+(i,j,k) \in [0, 300]$. Per l'esercitazione il n° di punti usati per discretizzare il volume del fluido è $N_x = N_y = 64$ ($i \in [1, 64]$; $j \in [1, 64]$) e $N_z = 65$ ($k \in [1, 65]$.

- STATISTICHE DA CALCOLARE:
  - $\langle u_i^+ \rangle = f(z^+)$ MEDIA $\forall\, i = x, y, z$
  - $RMS(u_i^+) = f(z^+)$ RMS $\forall\, i = x, y, z$
  - $SKW(u_i^+) = f(z^+)$ SKEWNESS $\forall\, i$
  - $FLT(u_i^+) = f(z^+)$ FLATNESS $\forall\, i$

MEDIARE SULLE DUE METÀ DEL CANALE!

Quindi:

$$\langle u_i^+ \rangle = \frac{1}{N_x} \cdot \frac{1}{N_y} \sum_{1}^{N_x}{}_j \sum_{1}^{N_y}{}_k u_i^+(j,k,m) \equiv \langle u_i \rangle(m)$$

con m = indice che rappresenta la direzione normale alla parete

$$RMS(u_i^+) = \frac{1}{N_x} \cdot \frac{1}{N_y} \sum_{1}^{N_x}{}_j \sum_{1}^{N_y}{}_k \sqrt{\frac{(u_i^+ - \langle u_i^+ \rangle)^2}{\langle u_i^+ \rangle}}$$

$$SKW(u_i^+) = \frac{1}{N_x} \cdot \frac{1}{N_y} \frac{\sum_{1}^{N_x}{}_j \sum_{1}^{N_y}{}_k (u_i^+ - \langle u_i^+ \rangle)^3}{[RMS(u_i^+)]^3}$$

$$FLT(u_i^+) = \frac{1}{N_x} \cdot \frac{1}{N_y} \frac{\sum_{1}^{N_x}{}_j \sum_{1}^{N_y}{}_k (u_i^+ - \langle u_i^+ \rangle)^4}{[RMS(u_i^+)]^4}$$

- Profilo di velocità medio lungo x in grafico con scala log-lin e confronto con profilo $\langle u_i^+ \rangle = z^+$ e $\langle u_i^+ \rangle = \frac{1}{K} \ln z^+ + C$
- Sforzo di taglio totale (da $+1$ a -1) e sue componenti
- Stress di Reynolds

Statistiche facoltative:

- PDF (u_i) ad una certa z
- $f(s)$ per le 3 comp. di velocità
- $E(\omega)$ o $E(k)$