



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI UDINE

Dipartimento Politecnico di Ingegneria e Architettura D.P.I.A.

Corso di laurea in Ingegneria Meccanica

Tesi di laurea

DISPERSIONE DI SEDIMENTI IN UNO SHEAR LAYER TURBOLENTO

Cucit Elia

26 luglio 2017

Relatore:

Prof. Cristian Marchioli

Indice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduzione | 2 |
| 2 | Le tecniche di simulazione | 4 |
| 2.1 | RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations) | 5 |
| 2.2 | LES (Large Eddy Simulation) | 7 |
| 3 | Metodologia | 8 |
| 3.1 | Le equazioni del moto | 8 |
| 3.2 | Discretizzazione | 10 |
| 3.3 | Integrazione nel tempo | 12 |
| 3.4 | Condizioni al contorno | 13 |
| 3.4.1 | Condizioni al contorno per la pressione | 13 |
| 3.4.2 | Condizioni al contorno periodiche | 13 |
| 3.5 | Modello a Sottogriglia | 14 |
| 4 | Il Programma | 15 |
| 4.1 | Parametri in Input e output | 15 |
| 4.2 | Lista parametri | 18 |
| 4.3 | Equazioni utilizzate per il tracciamento Lagrangiano di Particelle | 20 |
| 4.4 | Grandezze adimensionali per le particelle | 21 |
| 5 | Risultati | 22 |
| 5.1 | Dati in Input | 22 |
| 5.2 | Simulazione 1 | 23 |
| 5.2.1 | Distribuzione temporale per particelle aventi $D_p = 0.001$ | 24 |
| 5.2.2 | Distribuzione temporale per particelle aventi $D_p = 0.01$ | 25 |
| 5.2.3 | Diagrammi di Voronoi | 26 |
| 5.3 | Simulazione 2 | 28 |
| 5.3.1 | Distribuzione temporale per particelle aventi $D_p = 0.001$ | 29 |
| 5.3.2 | Distribuzione temporale per particelle aventi $D_p = 0.01$ | 30 |
| 5.3.3 | Diagrammi di Voronoi | 31 |
| 5.4 | Simulazione 3 | 33 |
| 5.4.1 | Distribuzione temporale per particelle aventi $D_p = 0.001$ | 34 |
| 5.4.2 | Distribuzione temporale per particelle aventi $D_p = 0.01$ | 35 |
| 5.4.3 | Diagrammi di Voronoi | 36 |
| 5.5 | Confronto tra le diverse distribuzioni preferenziali | 38 |
| 5.5.1 | Concentrazione preferenziale per $D_p = 0.001$ | 40 |
| 5.5.2 | Concentrazione preferenziale per $D_p = 0.01$ | 41 |
| 6 | Conclusioni | 42 |

1 Introduzione

La turbolenza è un fenomeno che si verifica spesso in natura ed è oggetto di studio da molti secoli. Già nel 1510 Leonardo da Vinci accompagnò una rappresentazione di vortici che si formavano dietro un ostacolo smussato con la seguente osservazione:

Osservo che il moto vorticoso della superficie dell'acqua, che assomiglia a quello dei capelli, ha due componenti: una parte causata dalla corrente principale, l'altra parte da un moto casuale e contrario.

Leonardo non conosceva i principi fondamentali della meccanica; le sue deduzioni derivano dalla semplice osservazione dei fenomeni fisici. Tuttavia i suoi scritti sul comportamento delle correnti fluide rivelano intuizioni che possono essere inquadrare in una prospettiva moderna quali la scoperta dell'esistenza di moti organizzati di diversa scala, l'importanza dei vortici nel moto di un fluido e, con un anticipo di circa 400 anni rispetto ad *Osborne Reynolds*, la possibile decomposizione del moto turbolento in una componente media ed una componente fluttuante.

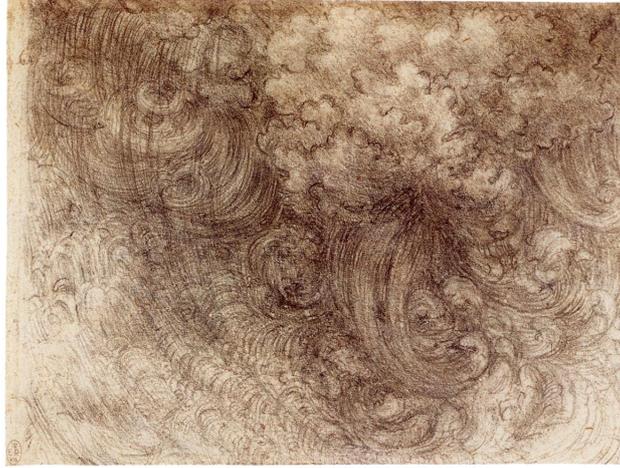


Figura 1: Pagina degli appunti di Leonardo da Vinci

Dopo più di centoventi anni dagli esperimenti di Osborne Reynolds, molto progresso è stato fatto. Le teorie statistiche sulla turbolenza hanno chiarito l'esistenza di moti organizzati di diversa scala in vari regimi di flusso. Molti studi hanno dato un ottimo grado di apprendimento della struttura del flusso turbolento, in particolare nell'identificazione dei vortici responsabili della maggior parte dell'energia prodotta. Le tecniche di misurazione ora possono dare valori di velocità e gradiente di velocità in un singolo punto utilizzando il velocimetro *Laser-Doppler* o l'anemometro, oppure la distribuzione di velocità grazie al velocimetro *Particle-Tracking* o al *Particle-Image*. Un significativo contributo alla ricerca è dovuto, negli ultimi trent'anni, allo sviluppo di avanzate tecniche di simulazione numerica dei flussi turbolenti come ad esempio *Direct numerical simulation* e *Large Eddy simulation*.

Nonostante queste tecniche (specialmente LES) siano state impiegate solo negli ultimi anni per problemi ingegneristici, la conoscenza ottenuta grazie alla loro applicazione sul comportamento delle particelle dei flussi è incalcolabile. I dati ottenuti dalla simulazione diretta sono stati largamente utilizzati per lo sviluppo di nuovi modelli, per confermarne la validità di altri e ha portato a nuove intuizioni sulla fisica dei flussi turbolenti. La previsione e il controllo dei flussi turbolenti e la necessità di sempre più accurati modelli di turbolenza richiedono al giorno d'oggi un impiego maggiore di *Direct simulation* e *Large eddy simulation*.

2 Le tecniche di simulazione

Le soluzioni analitiche o numeriche dei problemi di flussi turbolenti possono essere ottenute con diversi livelli di approssimazione, a seconda di un maggiore o minore livello di dettaglio nella descrizione dello stato del flusso. Il più semplice approccio è quello che si basa su correlazioni *semi-empiriche*: il diagramma di *Moody*, che permette di calcolare direttamente il valore del coefficiente di attrito f senza ricorrere all'equazione di Colebrook, ne è un esempio molto utile per analisi qualitative globali ma non contiene informazioni su quantità locali e la sua accuratezza dipende da quanto le condizioni sperimentali sono simili a quelle oggetto di studio.

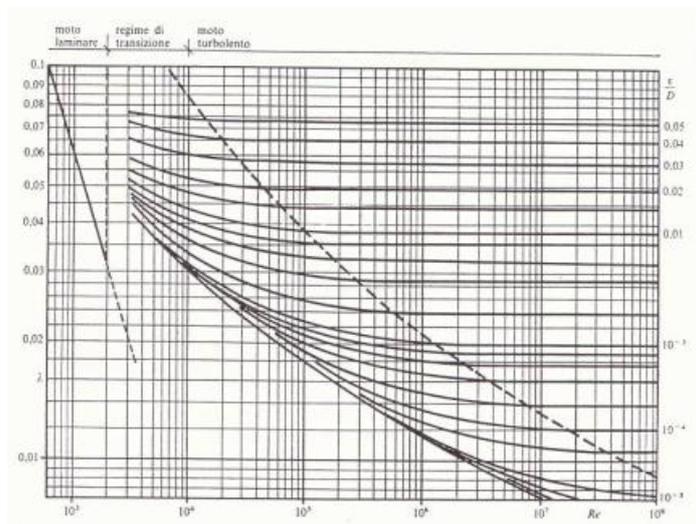


Figura 2: Il diagramma di Moody: in esso le ascisse rappresentano i valori del numero di Reynolds, le ordinate il valore del coefficiente di attrito f (incognita), e le diverse curve i valori della scabrezza relativa

Un metodo più sofisticato è quello delle equazioni mediate: la media temporale di una generica quantità f è definita come:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\tau) d\tau$$

nella quale T è l'intervallo temporale più lungo di tutte le scale temporali del flusso turbolento.

Questa operazione permette di separare una quantità in due parti: la componente media, $\langle f \rangle$, e quella fluttuante, $f - \langle f \rangle$. Questo procedimento è alla base delle molto note REYNOLDS-AVERAGED NAVIER-STOKES EQUATION (RANS).

DIRECT NUMERICAL SIMULATION (DNS) è l'approccio più semplice per la soluzione di flussi turbolenti. Nella DNS le equazioni sono direttamente discretizzate e risolte numericamente. Se la mesh è abbastanza fine anche da risolvere le scale più piccole del moto, si può ottenere una simulazione tridimensionale e dipendente dal tempo molto accurata nella quale gli unici errori sono dovuti ad approssimazioni numeriche. I suoi svantaggi riguardano la flessibilità nella gestione di geometrie complicate e il carico computazionale richiesto. Per questo motivo il suo utilizzo è stato limitato a geometrie semplici (figure piane, flussi omogenei) a bassi numeri di Reynolds e la sua applicazione nei problemi tipici ingegneristici è apparsa improbabile negli ultimi decenni. LARGE EDDY SIMULATION È una tecnica intermedia tra DNS e RANS: in LES i vortici di larga scala e la loro energia trasferita è calcolata esattamente e solamente l'effetto della turbolenza sulle scale più piccole è approssimato. I vortici più piccoli, infatti, tendono a essere più omogenei e universali e risentono meno delle condizioni al contorno rispetto a quelli grandi; quindi è probabile che il loro modello sia più semplice e simile da flusso a flusso.

Nel seguito di questa breve trattazione viene data una spiegazione piú dettagliata su:

- **RANS** (Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations)
- **LES** (Large Eddy Simulation).

2.1 RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations)

Nelle applicazioni pratiche, in generale, la sola conoscenza delle grandezze medie può essere sufficiente alla soluzione del problema relativo ad un flusso turbolento; l'idea di base della tecnica RANS è quella di derivare equazioni per le sole *grandezze medie* (medie nel tempo) a partire dalle equazioni di *Navier-Stokes*, al fine di potere ridurre l'enorme carico computazionale richiesto dalla **Direct Numerical Simulation - DNS**.

Il moto medio, inoltre, può essere sia bidimensionale che stazionario, contrariamente alla DNS che richiede sempre equazioni 3D ed instazionarie (questo può essere particolarmente vantaggioso nella simulazione di determinate condizioni fluidodinamiche).

L'equazioni per il moto medio che si ottengono sono esteticamente simili a quelle di Navier-Stokes fatta eccezione per la divergenza del tensore degli sforzi di Reynolds. Gli sforzi turbolenti di Reynolds sono del tutto fittizi rispetto alla realtà fisica e quantificano il trasferimento di energia cinetica dal moto medio alle strutture turbolente.

La differenza fra le equazioni di Navier-Stokes e le RANS non è purtroppo solo estetica in quanto mentre le equazioni di Navier-Stokes costituiscono un problema differenziale chiuso, le RANS non lo sono affatto perché il tensore di Reynolds aggiunge altre 6 *incognite* al problema. Il problema appena citato è noto come *problema di chiusura della Turbolenza* il quale, in generale, viene risolto introducendo dei modelli per le *fluttuazioni turbolente* i quali devono riprodurre l'azione dei termini fluttuanti sul moto medio riconducendo i valori degli sforzi turbolenti a sole grandezze relative al moto medio, e, l'idea comunemente usata per raggiungere tale obiettivo è quella di troncare il numero di equazioni ad un certo ordine e modellare le incognite di ordine superiore con delle relazioni approssimate. L'ostacolo principale alla genesi di appropriati Modelli di Turbolenza è quello di coprire l'intervallo piú ampio possibile dello spettro turbolento; in quanto le piccole scale sono isotrope ed universali, infatti, presentano le stesse proprietà indipendentemente dalla direzione di osservazione ed in tutte le correnti turbolente senza vincoli in termini di stazionarietà o meno delle condizioni al contorno.

Le strutture turbolente di dimensione maggiore, invece, hanno un comportamento dinamico intimamente connesso con il tipo di corrente turbolenta in esame e ciò è alla base della scarsa generalità dei Modelli di Turbolenza che si prefiggono l'obiettivo di rappresentare l'intero spettro turbolento ed è (il primo macro difetto) uno principali problemi delle simulazioni RANS perché è necessario calibrare il modello (esistono in letteratura dei *magic numbers* che permettono questo).

I principali modelli di turbolenza introducono, inoltre, la VISCOSITÀ CINEMATICA TURBOLENTA, che contrariamente a quella tradizionale, ha la peculiarità di variare sempre da punto a punto del fluido e di essere sempre instazionaria. L'introduzione della viscosità cinematica turbolenta comporta il notevole vantaggio di spostare l'incognita da un tensore ad uno scalare, per? introduce l'allineamento degli autovettori della parte deviatorica del tensore degli sforzi di Reynolds e della parte simmetrica del tensore gradiente della velocità; la proprietà di allineamento degli autovettori dei tensori prima citati non è in alcun modo giustificabile teoricamente e, inoltre, sperimentalmente si è visto che tali autovettori sono per la maggior parte dei casi quasi sempre disallineati. Il disallineamento di cui si è appena accennato produce una differenza fra la soluzione calcolata e misurata e alcune volte è fonte di errori molto grossolani che è il secondo macro difetto delle RANS.

I Modelli di Turbolenza basati sulla viscosità cinematica turbolenta sono detti **modelli dissipativi** e la loro adozione è fisicamente giustificata vista l'intrinseca natura dissipativa della Turbolenza.

Le simulazioni RANS sono molto efficienti, infatti, basti pensare che l'Alighi (l'imbarcazione che ha vinto America's Cup del 2003) è stata studiata fluidodinamicamente ed aerodinamicamente dal gruppo del Prof. Quarteroni del Politecnico di Milano facendo uso delle RANS con chiusura k-epsilon (che è il modello di turbolenza più diffuso e fu sviluppato nel 1972 da Launder e Spalding del gruppo dell'Imperial College di Londra).

2.2 LES (Large Eddy Simulation)

La Large Eddy Simulation, invece, si differenzia dalla tecnica RANS in quanto il campo di velocità viene mediato **nello spazio** anziché nel tempo e, inoltre, vengono direttamente simulate le strutture turbolente appartenenti al range inerziale dello spettro turbolento tali strutture vengono risolte utilizzando una griglia adeguatamente fitta, mentre le scale del moto, più piccole della griglia, (*Subgrid Scale*) vengono parametrizzate con un modello apposito. La scelta di simulare direttamente le strutture turbolente appartenenti al range inerziale si fonda sulle caratteristiche stesse delle strutture turbolente, difatti, le strutture turbolente di grande scala hanno un comportamento dinamico che dipende molto dal tipo di corrente e dalla direzione di osservazione; invece, le piccole scale turbolente **sono isotrope ed universali** perciò la dinamica delle strutture turbolente più piccole ha un carattere a sua volta universale. L'approccio LES, quindi, permette l'applicazione di un Modello di Turbolenza utilizzabile in via del tutto indipendente dal tipo di flusso in esame.

Bisogna però precisare che nelle RANS il termine che contiene la derivata temporale è presente solo nel caso di moto medio instazionario nella LES, invece, il termine relativo alla derivata nel tempo è sempre presente (anche se il moto medio è stazionario) in quanto le strutture turbolente grandi ed intermedie vanno direttamente risolte ed essendo queste sempre instazionarie e pertanto le equazioni della LES richiedono sempre la presenza del termine relativo alla derivata nel tempo. Per lo stesso motivo anche se la corrente media è 2D le equazioni della LES vanno risolte sempre in 3D perché le strutture turbolente, oltre all'instazionarietà, sono sempre caratterizzate da tridimensionalità.

L'approccio LES è del tutto simile alla tecnica RANS ma la differenza sostanziale fra le due tecniche di simulazione numerica dei flussi turbolenti risiede nel fatto che nella LES il "taglio" fra ciò che viene simulato e ciò che viene modellato non dipende solo dalla geometria del problema ma ha un legame anche con la posizione del range inerziale.

Le equazioni della LES, al pari delle RANS, come ampiamente descritto, presentano il problema della chiusura; la chiusura nella LES si raggiunge con Modelli di Turbolenza di Sottogriglia (SGS) i quali devono riprodurre gli effetti delle scale non risolte su quelle che vengono risolte direttamente. I Modelli di Sottogriglia, comunque, hanno un'influenza modesta sulla soluzione del problema, contrariamente a quanto accade per i Modelli di Turbolenza per le RANS, e, inoltre, tale importanza decresce quanto più la LES si avvicina al limite di risoluzione della DNS.

Il Modello di Smagorinsky ? un modello dissipativo per la Turbolenza di Sottogriglia e si basa sulla possibilità di legare la parte deviatorica del tensore degli sforzi di sottogriglia attraverso la viscosità cinematica turbolenta al tensore della velocità di deformazione (parte simmetrica del tensore gradiente della velocità).

Il maggior limite del Modello di Smagorinsky è che deve essere fissato a priori un coefficiente detto coefficiente di Smagorinsky e non sempre si riescono a rappresentare nel modo migliore i fenomeni locali ed in stazionari della corrente. I Modelli Dinamici, invece, (detti di Germano-Lilly) hanno la peculiarità di non fissare a priori il **coefficiente di Smagorinsky** il quale è determinato dinamicamente in funzione del campo di velocità risolto, superando in tal modo il limite del modello di Smagorinsky.

La LES è, a tutt'oggi, sotto intensa attività scientifica anche se si va praticamente per l'implementazione dei modelli di sottogriglia sui principali codici di calcolo commerciali.

3 Metodologia

Questa tesi si propone di analizzare tramite simulazioni numeriche accurate la dispersione di sedimenti all'interno di un campo di moto turbolento che caratterizza uno SHEAR-LAYER. Per shear-layer si intende la zona di transizione localizzata fra due getti liberi fra i quali esiste una certa velocità relativa. A tal fine si descriverà un programma FORTRAN che simulerà un flusso turbolento tridimensionale in coordinate Cartesiane utilizzando LES e sarà in grado di tracciare al variare del tempo, le distribuzioni dei sedimenti contenuti nel fluido.

L'interesse del nostro studio ricadrà su come, al variare di determinati parametri adimensionali rilevanti nel mondo della fluidodinamica, le particelle andranno ad occupare il dominio bidimensionale considerato, assumendo diverse concentrazioni preferenziali. Per fare ciò, utilizzeremo i diagrammi di Voronoi.

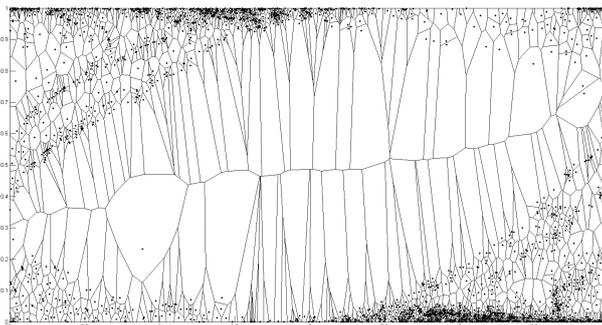


Figura 3: generico diagramma di Voronoi.

3.1 Le equazioni del moto

Le equazioni che governano il moto di un fluido viscoso incomprimibile sono la *Continuità* e l'equazione di *Navier-Stokes*.

Dall'equazione di *Continuità* si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Nella quale u è la componente di velocità lungo l'asse x , v lungo l'asse y , w lungo l'asse z .

Dall'equazione di *Navier-Stokes* in direzione x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial uu}{\partial x} - \frac{\partial vu}{\partial y} - \frac{\partial wu}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] - g_x \quad (2)$$

Nella quale ν è la *Viscosità Cinematica* (non costante), P la pressione equivalente e g_x una forza volumetrica nella direzione x (per esempio la gravità).

L'equazione di *Navier-Stokes* in direzione y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial uv}{\partial x} - \frac{\partial vv}{\partial y} - \frac{\partial wv}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\nu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\nu \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] - g_y \quad (3)$$

L'equazione di *Navier-Stokes* in direzione z :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial uw}{\partial x} - \frac{\partial vw}{\partial y} - \frac{\partial ww}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\nu \frac{\partial w}{\partial z} \right] - g_z \quad (4)$$

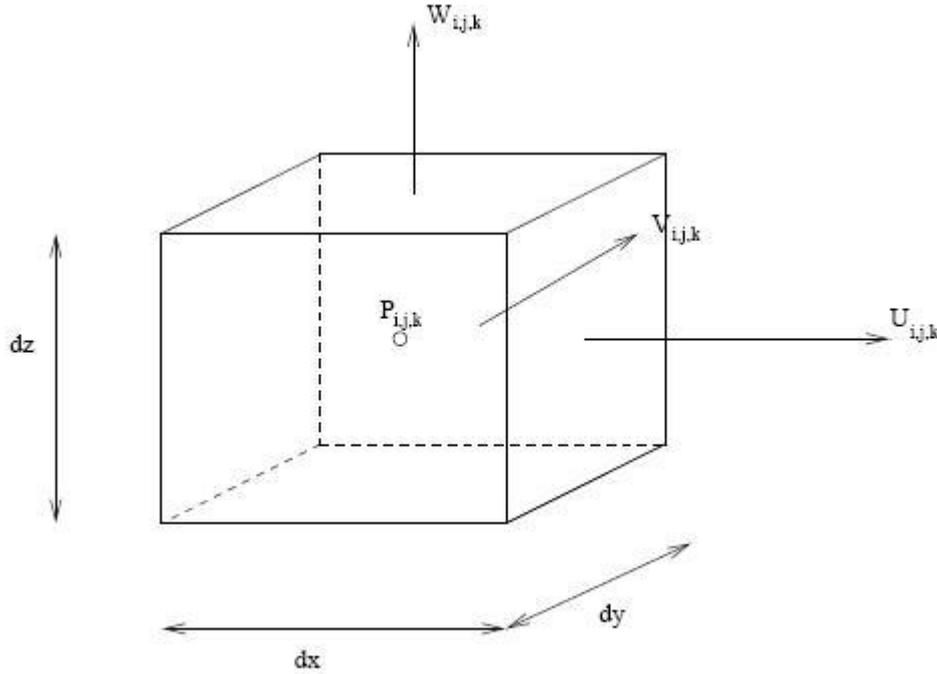


Figura 4: Una cella della griglia

Per convenienza le equazioni di *Navier-Stokes* saranno scritte così:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -ADV - \nabla P + DIFF - G. \quad (5)$$

Dove ADV sta per i termini Convettivi, DIFF per quelli Diffusivi, P per la pressione e G per l'accelerazione di Gravitá.

Nel modello numerico la turbolenza é simulata tramite la Viscosità turbolenta di *Smagorinsky* (Smagorinsky Eddy Viscosity):

$$\nu_t = l_{mix}^2 \sqrt{\frac{1}{2} S_{i,j} S_{i,j}} \quad (6)$$

Nella quale $S_{i,j} = S_{j,i}$ é il verb" Tensore della Velocità di deformazione", definito:

$$S = \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & 2\frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

La lunghezza mista l_{mix} " ricavata dallo spazio della griglia Δ dalla seguente formula:

$$l_{mix} = C_s \Delta,$$

nella quale C_s è la costante di Smagorinsky a cui " stato associato il valore 0.1. Di seguito indicheremo la somma della viscosità Turbolenta e la viscosità Cinematica con ν :

$$\nu = \nu_{molc} + \nu_t$$

3.2 Discretizzazione

In questa sezione si approssimeranno le equazioni di continuità e conservazione quantità di moto alla griglia che suddivide il nostro volume. Nella Figura 4 è stato rappresentato un esempio di una cella della griglia. Il punto di pressione $P_{i,j,k}$ è localizzato al centro della cella e le componenti di velocità ai lati. Prima di tutto descrizzeremo l'equazione di continuità attorno al punto $P_{i,j,k}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{dx}(U_{i,j,k} - U_{i-1,j,k}); \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{dy}(U_{i,j,k} - U_{i,j-1,k}); \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{dz}(U_{i,j,k} - U_{i,j,k-1}) \quad (7)$$

Dall'equazione di continuità si ha quindi:

$$\nabla(u, v, w) = \frac{1}{dx}(U_{i,j,k} - U_{i-1,j,k}) + \frac{1}{dy}(U_{i,j,k} - U_{i,j-1,k}) + \frac{1}{dz}(U_{i,j,k} - U_{i,j,k-1}). \quad (8)$$

Possiamo ricavare l'ultima equazione anche in un altro modo: considerando il volume di controllo dato in Figura 4, dal bilancio di massa su di esso si ottiene:

$$-\rho W_{i,j,k} dx dy + \rho W_{i,j,k-1} dx dy - \rho V_{i,j,k} dx dz + \rho V_{i,j-1,k} dx dz - \rho U_{i,j,k} dy dz + \rho U_{i-1,j,k} dy dz = 0 \quad (9)$$

Dividendo l'equazione per $\rho dx dy dz$ si riottiene esattamente l'equazione di partenza (8).

L'equazione di *Navier-Stokes* in direzione x sarà approssimata nel seguente modo:

$$\frac{\partial uu}{\partial x} = \frac{1}{dx} \left[\left(\frac{U_{i+1,j,k} + U_{i,j,k}}{2} \right)^2 - \left(\frac{U_{i,j,k} + U_{i-1,j,k}}{2} \right)^2 \right] \quad (10)$$

$$\frac{\partial uv}{\partial y} = 0.25 \frac{1}{dy} [(U_{i,j,k} + U_{i,j+1,k})(V_{i,j,k} + V_{i+1,j,k}) - [(U_{i,j,k} + U_{i,j-1,k})(V_{i,j-1,k} + V_{i+1,j-1,k})] \quad (11)$$

$$\frac{\partial uw}{\partial z} = 0.25 \frac{1}{dz} [(U_{i,j,k} + U_{i,j,k+1})(W_{i,j,k} + W_{i+1,j,k}) - [(U_{i,j,k} + U_{i,j,k-1})(W_{i,j,k-1} + W_{i+1,j,k-1})] \quad (12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{dx} (P_{i+1,j,k} - P_{i,j,k}) \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{1}{dx} \left[2\nu \left(\frac{U_{i+1,j,k} - U_{i,j,k}}{dx} \right) - 2\nu \left(\frac{U_{i,j,k} - U_{i-1,j,k}}{dx} \right) \right] \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = \frac{1}{dy} \left[\nu \left(\frac{U_{i,j+1,k} - U_{i,j,k}}{dy} + \frac{V_{i+1,j,k} - V_{i,j,k}}{dx} \right) - \nu \left(\frac{U_{i,j,k} - U_{i,j-1,k}}{dy} + \frac{V_{i+1,j-1,k} - V_{i,j-1,k}}{dx} \right) \right] \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = \frac{1}{dz} \left[\nu \left(\frac{U_{i,j,k+1} - U_{i,j,k}}{dz} + \frac{W_{i+1,j,k} - W_{i,j,k}}{dx} \right) - \nu \left(\frac{U_{i,j,k} - U_{i,j,k-1}}{dz} + \frac{W_{i+1,j,k-1} - W_{i,j,k-1}}{dx} \right) \right] \quad (16)$$

Nelle quali $\nu = \nu(x, y, z)$ è funzione delle coordinate spaziali (x, y, z) .

L'equazione di *Navier-Stokes* in direzione y sarà approssimata nel seguente modo:

$$\frac{\partial vv}{\partial x} = \frac{1}{dx} \left[\left(\frac{V_{i,j+1,k} + V_{i,j,k}}{2} \right)^2 - \left(\frac{V_{i,j,k} + V_{i,j-1,k}}{2} \right)^2 \right] \quad (17)$$

$$\frac{\partial uw}{\partial x} = 0.25 \frac{1}{dx} [(U_{i,j,k} + U_{i,j+1,k})(V_{i,j,k} + V_{i+1,j,k}) - [(U_{i-1,j,k} + U_{i-1,j+1,k})(V_{i,j,k} + V_{i-1,j,k})] \quad (18)$$

$$\frac{\partial vw}{\partial x} = 0.25 \frac{1}{dx} [(V_{i,j,k} + V_{i,j,k+1})(W_{i,j,k} + W_{i,j+1,k})] - [(V_{i,j,k} + V_{i,j,k-1})(W_{i,j,k-1} + W_{i,j+1,k-1})] \quad (19)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{dx} (P_{i,j+1,k} - P_{i,j,k}) \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[2\nu \frac{\partial v}{\partial y} \right] = \frac{1}{dy} \left[2\nu \left(\frac{V_{i,j+1,k} - V_{i,j,k}}{dy} \right) - 2\nu \left(\frac{V_{i,j,k} - V_{i,j-1,k}}{dy} \right) \right] \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = \frac{1}{dx} \left[\nu \left(\frac{U_{i,j+1,k} - U_{i,j,k}}{dx} + \frac{V_{i+1,j,k} - V_{i,j,k}}{dx} \right) - \nu \left(\frac{U_{i-1,j+1,k} - U_{i-1,j,k}}{dx} + \frac{V_{i,j,k} - V_{i-1,j,k}}{dx} \right) \right] \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] = \frac{1}{dz} \left[\nu \left(\frac{V_{i,j,k+1} - V_{i,j,k}}{dz} + \frac{W_{i,j+1,k} - W_{i,j,k}}{dy} \right) - \nu \left(\frac{V_{i,j,k} - V_{i-1,j,k}}{dx} + \frac{W_{i,j+1,k-1} - W_{i,j,k-1}}{dx} \right) \right] \quad (23)$$

L'equazione di *Navier-Stokes* in direzione z sarà approssimata nel seguente modo:

$$\frac{\partial ww}{\partial z} = \frac{1}{dz} \left[\left(\frac{W_{i,j,k+1} + W_{i,j,k}}{2} \right)^2 - \left(\frac{W_{i,j,k} + W_{i,j,k-1}}{2} \right)^2 \right] \quad (24)$$

$$\frac{\partial uw}{\partial x} = 0.25 \frac{1}{dx} [(U_{i,j,k} + U_{i,j,k+1})(W_{i,j,k} + W_{i+1,j,k})] - [(U_{i-1,j,k} + U_{i-1,j,k+1})(W_{i,j,k} + W_{i-1,j,k})] \quad (25)$$

$$\frac{\partial vw}{\partial y} = 0.25 \frac{1}{dy} [(V_{i,j,k} + V_{i,j,k+1})(W_{i,j,k} + W_{i,j+1,k})] - [(V_{i,j-1,k} + V_{i,j-1,k+1})(W_{i,j,k} + W_{i,j-1,k})] \quad (26)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{dz} (P_{i,j,k+1} - P_{i,j,k}) \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[2\nu \frac{\partial w}{\partial z} \right] = \frac{1}{dz} \left[2\nu \left(\frac{W_{i,j,k+1} - W_{i,j,k}}{dz} \right) - 2\nu \left(\frac{W_{i,j,k} - W_{i-1,j,k}}{dz} \right) \right] \quad (28)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \frac{1}{dx} \left[\nu \left(\frac{W_{i+1,j,k} - W_{i,j,k}}{dx} + \frac{U_{i,j,k+1} - U_{i,j,k}}{dz} \right) - \nu \left(\frac{W_{i,j,k} - W_{i-1,j,k}}{dx} + \frac{U_{i-1,j,k+1} - U_{i-1,j,k}}{dz} \right) \right] \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] = \frac{1}{dy} \left[\nu \left(\frac{W_{i,j+1,k} - W_{i,j,k}}{dy} + \frac{V_{i,j,k+1} - V_{i,j,k}}{dz} \right) - \nu \left(\frac{W_{i,j,k} - W_{i,j-1,k}}{dy} + \frac{V_{i,j-1,k+1} - V_{i,j-1,k}}{dz} \right) \right] \quad (30)$$

La discretizzazione di tutti i termini dell'equazione di Navier-Stokes é approssimata al secondo ordine nello spazio. La discretizzazione del modello a Sottogriglia sarà data in seguito.

3.3 Integrazione nel tempo

Nella *Fluidodinamica computazionale* esistono vari algoritmi impliciti ed espliciti per integrare nel tempo. Solitamente il massimo *time-step* dt permesso é maggiore nei metodi impliciti rispetto a quelli espliciti. Comunque per le applicazioni LES/DNS 3D su larga scala gli schemi impliciti sono troppo dispendiosi a livello computazionale, invece quelli espliciti sebbene con uno *time step* piú piccolo sono piu veloci e maggiormente accurati. In questa simulazione si é scelto di utilizzare l'algoritmo esplicito di second'ordine di ADAM-BASHFORD che é facilmente ricavabile dallo sviluppo in serie di Taylor. Considerando la seguente equazione:

$$y^{n+1} - y^n = h(af^n + bf^{n-1}) \quad \text{con} \quad y' = f \quad (31)$$

L'espansione in serie di Taylor dá:

$$y^{n+1} = y(x+h) = y(x) + hf(x) + \frac{h^2}{2}f'(x) + 0(h^3) \quad (32)$$

$$y^n = y(x) \quad (33)$$

$$af^n = af(x) \quad (34)$$

$$bf^{n-1} = bf(x-h) = bf(x) - bhf'(x) + b\frac{h^2}{2}f''(x) + 0(h^3) \quad (35)$$

Sostituendo quindi l'espressione ottenuta dall'equazione (35) nell'equazione (31) ed eliminando i termini in piú si ottiene:

$$hf(x) + \frac{h^2}{2}f'(x) = h(a+b)f(x) - h^2bf'(x) + 0(h^3) \quad (36)$$

Il metodo é del'secondo ordine per $(y^{n+1} - y^n)/h$ quando $a+b=1$ e $b=-0.5$ ottenendo cosí lo schema di second'ordine di *Adam-Bashfort*. Per l'equazione di Navier-Stokes questo metodo é utilizzato per la derivazione temporale della velocitá ma non pu? essere utilizzato per la Pressione perché non c'è la derivata temporale. Un modo possibile per evitare problemi d'integrazione del termine di pressione é il seguente:

integrare l'equazione di Navier-Stokes nel tempo senza i termini del gradiente di pressione e utilizzare poi l'equazione di continuitá per trovare un'equazione per la pressione. Cosí facendo ci troveremo con la seguente formula da risolvere:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t[1.5(-ADV + DIFF)^n - 0.5(-ADV + DIFF)^{n-1} - \nabla P^{n+1}] \quad (37)$$

Notare che la pressione ? calcolata a $n+1$. Possiamo quindi riscrivere l'equazione di prima come:

$$u^{n+1} + \Delta t \nabla P^{n+1} = u^* = u^n + \Delta t[1.5(-ADV + DIFF)^n - 0.5(-ADV + DIFF)^{n-1}], \quad (38)$$

Dalla divergenza della Velocitá si ottiene:

$$\Delta t \nabla^2 P^{n+1} = \text{div}(u^*) \quad (39)$$

Dove si é imposta nulla la divergenza del vettore Velocitá a $n+1$.

La discretizzazione di questa equazione é molto semplice:

$$\frac{P_{i+1,j,k} - 2P_{i,j,k} + P_{i-1,j,k}}{dx^2} + \frac{P_{i,j+1,k} - 2P_{i,j,k} + P_{i,j-1,k}}{dy^2} + \frac{P_{i,j,k+1} - 2P_{i,j,k} + P_{i,j,k-1}}{dz^2} = \frac{1}{dt} \left(\frac{u_{i,j,k}^* - u_{i-1,j,k}^*}{dx} + \frac{v_{i,j,k}^* - v_{i,j-1,k}^*}{dy} + \frac{w_{i,j,k}^* - w_{i,j,k-1}^*}{dz} \right); \quad (40)$$

L'equazione di Poisson discretizzata (40) é risolta dal *Pois3d* nel pacchetto *FISHPACK* (vedi programma).

Ottenuta la Pressione si ottiene $u^{n+1} = u^* - \Delta t \nabla P_{n+1}$, cio?:

$$U_{i,j,k} = U_{i,j,k}^* - dt \left(\frac{P_{i+1,j,k} - P_{i,j,k}}{dx} \right) \quad (41)$$

$$V_{i,j,k} = V_{i,j,k}^* - dt \left(\frac{P_{i,j+1,k} - P_{i,j,k}}{dy} \right) \quad (42)$$

$$W_{i,j,k} = W_{i,j,k}^* - dt \left(\frac{P_{i,j,k+1} - P_{i,j,k}}{dz} \right). \quad (43)$$

3.4 Condizioni al contorno

In fluidodinamica, la condizione di *non-slip* per fluido viscoso afferma che se limitato da una parete solida, il fluido avrà velocità zero sulla parete. Alla parete solida la condizione di Non-Scorrimento può essere implementata nel seguente modo:

$$W_{i,j,0} = 0 \quad (44)$$

$$V_{i,j,0} = -V_{i,j,1} \quad (45)$$

$$U_{i,j,0} = -U_{i,j,1} \quad (46)$$

Viceversa la condizione di libero scorrimento alla parete pu? essere implementata nel seguente modo:

$$W_{i,j,0} = 0 \quad (47)$$

$$V_{i,j,0} = V_{i,j,1} \quad (48)$$

$$U_{i,j,0} = U_{i,j,1} \quad (49)$$

3.4.1 Condizioni al contorno per la pressione

Teoricamente le condizioni al contorno della pressione sono già fissate dalle condizioni al contorno della velocità. Ad ogni modo il pacchetto FISHPACK necessita di condizioni al contorno per la pressione. Queste condizioni al contorno devono essere scelte in modo tale che non alterino le condizioni al contorno della velocità e perciò per la pressione devono essere utilizzate le condizioni al contorno di *Neumann* cioè specificano i valori che la derivata di una soluzione deve assumere sul contorno del dominio.

3.4.2 Condizioni al contorno periodiche

Un particolare tipo di condizioni al contorno che sono frequentemente utilizzate in LES/DNS sono le cosiddette condizioni al contorno periodiche. L'implementazione di queste condizioni al contorno ? semplice, per esempio in direzione y :

$$U_{i,jmax+1,k} = U_{i,1,k} \quad (50)$$

$$V_{i,jmax+1,k} = V_{i,1,k} \quad (51)$$

$$W_{i,jmax,k} = W_{i,1,k} \quad (52)$$

$$U_{i,0,k} = U_{i,jmax,k} \quad (53)$$

$$V_{i,0,k} = V_{i,jmax,k} \quad (54)$$

$$W_{i,0,k} = W_{i,jmax,k} \quad (55)$$

In questo particolare caso anche le condizioni al contorno della pressione saranno periodiche.

3.5 Modello a Sottogriglia

In questa sezione si discretizza il modello a Sottogriglia di Smagorinsky. La viscosità Turbolenta á calcolata nel seguente modo:

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 \sqrt{\frac{1}{2} S_{i,j} S_{i,j}} \quad (56)$$

nella quale si è posto $\Delta = (dxdydz)^{\frac{1}{3}}$

Dalla discretizzazione del Tensore di velocità di deformazione $S_{i,j} S_{i,j}$ attorno il punto di pressione $P_{i,j,k}$ si ha:

$$\begin{aligned} S_{i,j} S_{i,j} = & 4 \left(\frac{U_{i,j,k} - U_{i-1,j,k}}{dx} \right)^2 + 4 \left(\frac{V_{i,j,k} - V_{i,j-1,k}}{dy} \right)^2 + 4 \left(\frac{W_{i,j,k} - W_{i,j,k-1}}{dz} \right)^2 + \\ & 0.5 \left[\left(\frac{U_{i,j+1,k} - U_{i,j,k}}{dy} + \frac{V_{i+1,j,k} - V_{i,j,k}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{U_{i,j,k} - U_{i,j-1,k}}{dy} + \frac{V_{i+1,j-1,k} - V_{i,j-1,k}}{dx} \right)^2 + \right. \\ & \left. \left(\frac{U_{i-1,j+1,k} - U_{i-1,j,k}}{dy} + \frac{V_{i,j,k} - V_{i-1,j,k}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{U_{i-1,j,k} - U_{i-1,j-1,k}}{dy} + \frac{V_{i,j-1,k} - V_{i-1,j-1,k}}{dx} \right)^2 \right] + \\ & 0.5 \left[\left(\frac{U_{i,j,k+1} - U_{i,j,k}}{dz} + \frac{W_{i+1,j,k} - W_{i,j,k}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{U_{i,j,k} - U_{i,j,k-1}}{dz} + \frac{W_{i+1,j,k-1} - W_{i,j,k-1}}{dx} \right)^2 + \right. \\ & \left. \left(\frac{U_{i-1,j,k+1} - U_{i-1,j,k}}{dz} + \frac{W_{i,j,k} - W_{i-1,j,k}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{U_{i-1,j,k} - U_{i-1,j,k-1}}{dz} + \frac{W_{i,j,k-1} - W_{i-1,j,k-1}}{dx} \right)^2 \right] + \\ & 0.5 \left[\left(\frac{V_{i,j,k+1} - V_{i,j,k}}{dz} + \frac{W_{i,j+1,k} - W_{i,j,k}}{dy} \right)^2 + \left(\frac{V_{i,j,k} - V_{i,j,k-1}}{dz} + \frac{W_{i,j+1,k-1} - W_{i,j,k-1}}{dy} \right)^2 + \right. \\ & \left. \left(\frac{V_{i,j-1,k+1} - V_{i,j-1,k}}{dz} + \frac{W_{i,j,k} - W_{i,j-1,k}}{dy} \right)^2 + \left(\frac{V_{i,j-1,k} - V_{i,j-1,k-1}}{dz} + \frac{W_{i,j,k-1} - W_{i,j-1,k-1}}{dy} \right)^2 \right] \quad (57) \end{aligned}$$

La viscosità può essere ora scritta come:

$$\nu = \nu_{molc} + (C_s \Delta)^2 \sqrt{\frac{1}{2} S_{i,j} S_{i,j}} \quad (58)$$

Notare che la viscosità è calcolata attorno al punto di pressione mentre i termini viscosi sono ricavati ai lati delle celle.

4 Il Programma

4.1 Parametri in Input e output

Il programma in FORTRAN (*formula translation*) riceve dal file INPUT:

- la velocità imperturbata del fluido U_∞
- la lunghezza l_x
- la lunghezza l_y
- la lunghezza l_z
- il numero di Reynolds del fluido
- il numero di intervalli temporali da considerare
- il numero di set di particelle da considerare (fissati a 2)
- il numero di particelle da considerare per ogni set
- il diametro D_p rispettivamente per ogni set di particelle considerati
- il rapporto (adimensionale) tra la densità delle particelle e quella del fluido
- il valore di time-step a cui ogni multiplo il programma restituisce in output i file pospar e velpar

Quindi sono state ottenute le dimensioni delle celle della griglia:

$$\Delta x = \frac{L_x}{i_{max}}$$

$$\Delta y = \frac{L_y}{j_{max}}$$

$$\Delta z = \frac{L_z}{k_{max}}$$

Nelle quali $i_{max}, j_{max}, k_{max}$ sono il numero dei punti della griglia forniti dal file PARAM.TXT. Terminata la simulazione, si ottiene in output il file di testo TECDATA.TXT che contiene i valori delle grandezze interessate, in ordine: posizione X, Y , velocità U , velocità W , pressione P e Vorticità. I dati ottenuti sono stati poi elaborati tramite Gnuplot e Matlab ottenendo le figure mostrate in seguito.

I due file di testo esterni:

PARAM.TXT: IMPOSTA I PUNTI DELLA GRIGLIA: $i_{max}, j_{max}, z_{max}$

```
integer imax,jmax,kmax,i,j,k
integer i1 ,j1 ,k1
parameter ( imax =256)
parameter ( jmax = 4)
parameter ( kmax =256)
parameter ( i1 =imax+1)
parameter ( j1 =jmax+1)
parameter ( k1 =kmax+1)
```

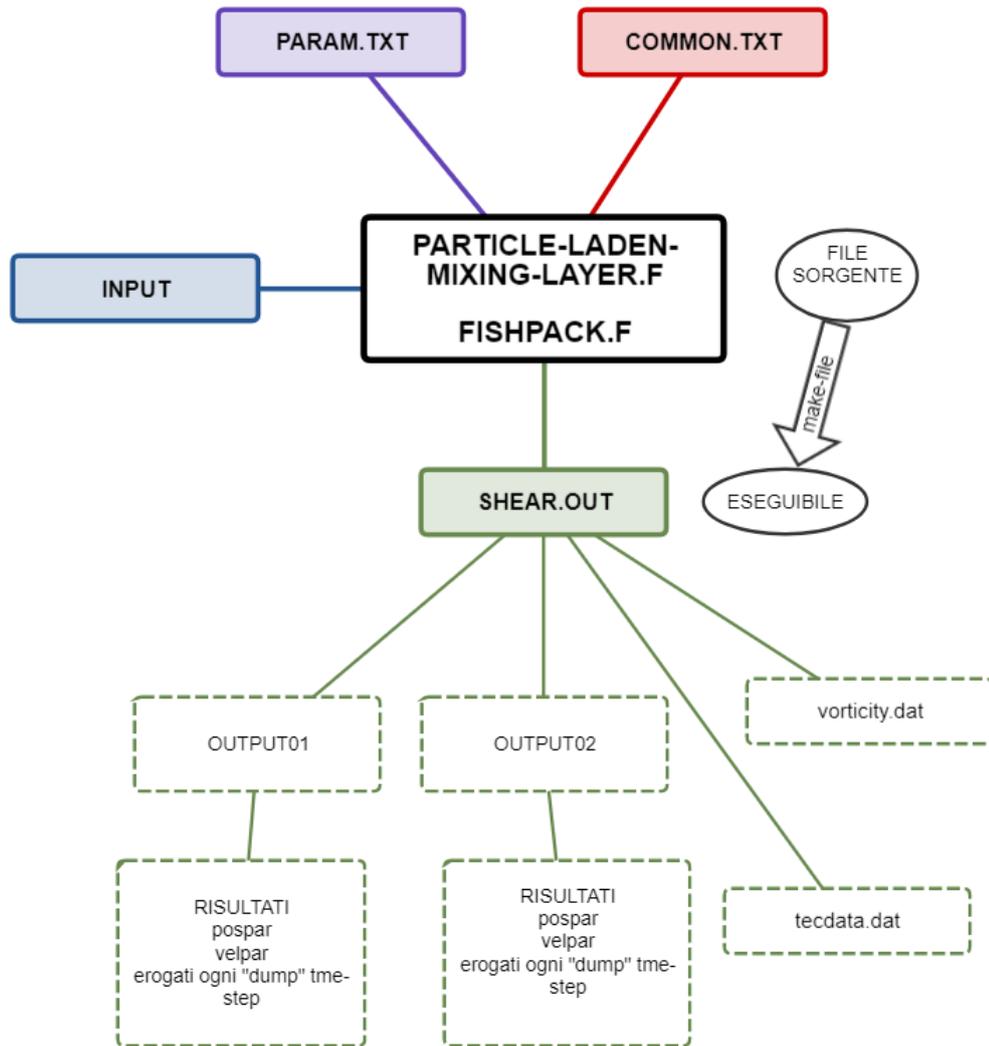


Figura 5: Flow chart delle operazioni svolte dal programma

COMMON.TXT: DEFINISCE IL DOMINIO DELLE VELOCITÀ DELL'ISTANTE PRECEDENTE, U_{old} V_{old} e W_{old} E ISTANTE PRESENTE, U_{new} V_{new} e W_{new} , PRESSIONE E VISCOSITÀ

```
realUold(0:i1,0:j1,0:k1),Vold(0:i1,0:j1,0:k1),Wold(0:i1,0:j1,0:k1)
common /old/Uold,Vold,Wold
```

```
realUnew(0:i1,0:j1,0:k1),Vnew(0:i1,0:j1,0:k1),Wnew(0:i1,0:j1,0:k1)
common /new/Unew,Vnew,Wnew
```

```
realdUdt(0:i1,0:j1,0:k1),dVdt(0:i1,0:j1,0:k1),dWdt(0:i1,0:j1,0:k1)
common /deriv/dUdt,dVdt,dWdt
```

```
real p(imax,jmax,kmax)
common /pressure/p
```

```
real dxi,dyi,dzi,Rei,dt,Ufree,cs
common /parm/dxi,dyi,dzi,Rei,dt,Ufree,cs
```

```
real visc(0:i1,0:j1,0:k1)
```

```
common /viscosity/visc
```

Il pacchetto **FISHPACK.F** ha il compito di integrare le equazioni Poisson (pois3d) per ottenere i termini della pressione.

I file in OUTPUT risulteranno essere :

- OUTPUT01 Cartella in cui saranno raccolti in maniera formattata i file pospar e velpar contenenti rispettivamente posizione e velocità istantanea di ogni singola particella avente diametro $D_p = 0.001$
- OUTPUT02 Cartella in cui saranno raccolti in maniera formattata i file pospar e velpar contenenti rispettivamente posizione e velocità istantanea di ogni singola particella avente diametro $D_p = 0.01$
- tecdata File.dat formattato in colonne e contenente rispettivamente: posizione "X",posizione "Y", "U-vel", "V-vel", "W-vel", "P", "VORT"
- vorticity File.dat formattato in colonne contenente rispettivamente: posizione "X",posizione "Y", "VORT"

4.2 Lista parametri

Lista dei parametri:

imax : numero dei punti della griglia in direzione x = 256
jmax : numero dei punti della griglia in direzione y = 4
kmax : numero dei punti della griglia in direzione z = 256

lx : Lunghezza del dominio di simulazione in direzione x, fornito dal file input = 4

ly : Lunghezza del dominio di simulazione in direzione y, fornito dal file input = 0.01

lz : Lunghezza del dominio di simulazione in direzione z, fornito dal file input = 1

Cs : Costante di Smagorinsky impostata a 0.1

$dxi = 1/dx = imax / lx$

$dyi = 1/dy = jmax / ly$

$dzi = 1/dz = kmax / lz$

Rei : $1 / Re$ con $Re =$ numero di Reynolds

nstap : numero degli timesteps, impostati a 10000

nsetnumber : numero di sets di particelle considerate, impostato a 2

DDP(1) : diametro particelle primo set fissato a 0.001

DPP(2) : diametro particelle secondo set fissato a 0.01

ROPP : rapporto tra le densità del fluido e delle particelle

dump : Numero di time-step a cui ogni multiplo il programma aggiorna i file pospar e velpar

Uold(0:imax+1,0:jmax+1,0:kmax+1) Velocità in direzione x al timestep precedente

Vold(0:imax+1,0:jmax+1,0:kmax+1) Velocità in direzione y al timestep precedente

Wold(0:imax+1,0:jmax+1,0:kmax+1) Velocità in direzione z al timestep precedente

Unew(.....) Velocità al timestep presente in direzione x

Vnew(.....) Velocità al timestep presente in direzione y

Wnew(.....) Velocità al timestep presente in direzione z

dUdt(.....),dVdt(...),dWdt(.....) vVelocità prevista al nuovo timestep

P(imax,jmax,kmax) : Vettore della Pressione

visc(0:imax+1,0:jmax+1,0:kmax+1): Vettore della viscosità turbolenta prevista in LES

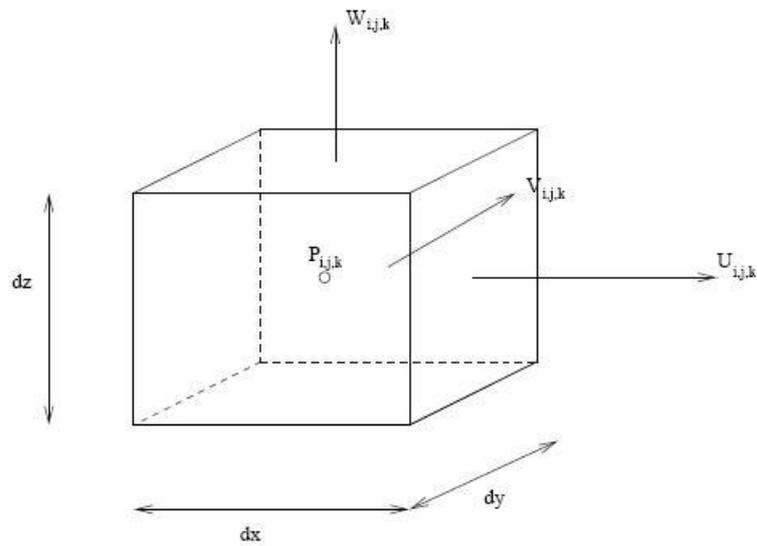


Figura 6: Una cella della griglia

U : Velocità in direzione x [$U(i,j,k)$]
V : Velocità in direzione y [$V(i,j,k)$]
W : Velocità in direzione z [$W(i,j,k)$]
° : Punto di pressione
dx,dy,dz: dimensioni delle celle della griglia

4.3 Equazioni utilizzate per il tracciamento Lagrangiano di Particelle

Secondo l'approccio Lagrangiano, il moto delle particelle è descritto da due equazioni differenziali ordinarie per la posizione e velocità delle particelle. Queste equazioni in forma vettoriale sono rappresentate di seguito, insieme alla correlazione non lineare scelta per il coefficiente di attrito C_d ed alla formulazione dei numeri di Reynolds :

$$\frac{dx_p}{dt} = u_p \quad (59)$$

$$\frac{du_p}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{C_D}{d_p} \left(\frac{\rho_f}{\rho_p} \right) |u_p - u_{f@p}| (u_p - u_{f@p}) \quad (60)$$

$$C_D = \frac{24}{Re_p} (1 + 0.15 Re_p^{0.687}) \quad (61)$$

$$Re_f = \frac{U_\infty^2 l_z}{\nu_f} \quad (62)$$

$$Re_p = \frac{d_p |u_p - u_{f@p}|}{\nu_f} \quad (63)$$

dove abbiamo indicato con:

- C_D il coefficiente di attrito, ricavato tramite una correlazione non lineare
- $\left(\frac{\rho_f}{\rho_p} \right)$ il rapporto tra le densità fluido-particelle
- u_p la velocità della particella
- $u_{f@p}$ la velocità del fluido nella posizione della particella
- Re_f il numero di reynolds riferito al fluido
- Re_p il numero di reynolds riferito alle particelle

L'approccio Lagrangiano consiste nel risolvere tali equazioni (59) per ciascuna particella ad ogni istante temporale. Per poter quindi calcolare le traiettorie della fase dispersa nel nostro flusso turbolento si è accoppiato una serie di routine per il tracciamento Lagrangiano di particelle (LPT) a quelle per la soluzione numerica diretta (DNS) del flusso. A tal fine sono state fatte le seguenti assunzioni:

- le particelle saranno valutate come sfere rigide, puntiformi e non rotanti;
- le particelle sono immerse nel flusso ad una concentrazione sufficientemente bassa da non influire sul campo di moto del fluido (one-way coupling) e da poter ignorare le collisioni tra particelle.

Queste assunzioni portano ad una semplificazione del modello fisico, tuttavia rimane sufficientemente dettagliato per esaminare i fenomeni che caratterizzano i flussi bifase. Le equazioni per il moto delle particelle sono integrate nel tempo secondo l'algoritmo 4°-ordine di Runge-Kutta: all'inizio della simulazione le particelle sono distribuite casualmente nel nostro dominio ad una velocità pari a quella del fluido nella posizione della particella. Condizioni al contorno periodiche sono imposte per le direzioni omogenee x e y quando le particelle si muovono al di fuori dei contorni del canale. Le collisioni a parete avvengono quando il centro della particella è a una distanza minore del raggio. Il passo temporale usato per il tracciamento della particelle è pari a quello utilizzato per il fluido, cioè $\delta t^+ = 0.045$.

Infine dall'equazione (60) si nota che per un calcolo preciso delle forze agenti sulle particelle è necessario un preciso calcolo della velocità istantanea del fluido nella posizione della particella $u_{f@p}$. Questo è un aspetto critico per l'approccio Lagrangiano e sono presenti molti studi che propongono diversi metodi di interpolazione delle velocità. Nelle nostre analisi si è utilizzata un'interpolazione basata su polinomi di Lagrange del 6°-ordine.

4.4 Grandezze adimensionali per le particelle

Per rendere la trattazione più generale e mettere in rilievo alcuni importanti parametri, in questa sezione si procede alla adimensionalizzazione delle equazioni del moto per le particelle. Le particelle sono caratterizzate dal tempo caratteristico:

$$\tau_p = \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu_f} \quad (64)$$

- ρ_p è la densità della particella
- D_p è il diametro della particella
- μ_f è la densità del fluido

un parametro importante che determina il tempo necessario affinché le particelle risentano delle fluttuazioni del fluido. In termini non dimensionali, il tempo caratteristico di risposta della particelle è definito dal numero di Stokes,

$$St = \frac{\tau_p}{\tau_f} \quad (65)$$

dove τ_f è il tempo-scala del fluido:

$$\tau_f = \frac{\nu_f}{U_\infty^2} \quad (66)$$

- $\nu_f = \frac{\mu_f}{\rho_f}$ è la viscosità cinematica del fluido
- U_∞^2 è la velocità indisturbata del fluido

Questo tempo caratteristico è proporzionale al tempo di rotazione dei vortici e fornisce una misura del tempo di interazione tra vortici e particelle.

Un numero di Stokes piccolo $St \ll 1$ indica particelle che rispondono prontamente alle fluttuazioni del fluido, viceversa un numero di Stokes alto $St \gg 1$ descrive particelle con maggior inerzia e perciò meno influenzabili dal flusso.

Proviamo ad elaborare rispetto a come vengono gestiti i dati in input del nostro programma, una formulazione del numero di Stokes semplificata per la nostra evoluzione.

Definiamo il diametro adimensionale delle particelle e il rapporto tra le densità rispettivamente come :

$$D_{p,ad.} = \frac{D_p U_\infty}{\nu_f} \quad (67)$$

$$R_{opp} = \frac{\rho_p}{\rho_f} \quad (68)$$

Allora nella formulazione di St , sostituendo e semplificando :

$$St = \frac{\tau_p}{\tau_f} = \frac{\rho_p D_p^2 U_\infty^2}{18\mu_f \nu_f} = \frac{\rho_p D_{p,ad.}^2 \nu_f^2 U_\infty^2}{18\mu_f U_\infty^2 \nu_f} = \frac{\rho_p D_{p,ad.}^2}{18\rho_f} = \frac{R_{opp} D_{p,ad.}^2}{18} \quad (69)$$

otteniamo l'espressione del parametro di Stokes, in cui abbiamo raccolto ed evidenziato quali parametri risultano essere protagonisti nelle nostre simulazioni.

5 Risultati

5.1 Dati in Input

Ogni simulazione comprende uno Shear-layer generato con i parametri adimensionali esposti nella seguente Tabella. Inoltre, per ognuno di essi, studieremo l'evoluzione temporale di 2 insiemi diversi di particelle, rispettivamente per particelle aventi $D_p = 0.001$ e $D_p = 0.01$.

| Simulazione | Velocità U_∞ | N. di Reynolds | N. Time step | N. Particelle |
|-------------|---------------------|----------------|--------------|---------------|
| 1 | 25 | 100 | 10000 | 2000 |
| 2 | 25 | 1000 | 10000 | 2000 |
| 3 | 25 | 10000 | 10000 | 2000 |

Tabella 1: Elenco delle simulazione effettuate: le unità sono tutte adimensionali

Per ogni simulazione effettuata e per ogni caratteristica del set di particelle, quindi per 2 diversi valori di diametro D_p , riportiamo in ordine:

- Il campo di vorticità completamente sviluppato dello shear-layer, sovrapposto alla distribuzione delle paricelle nel time step $n = 10000$.
- Una sequenza di 8 fotogrammi rappresentativi l'evoluzione temporale delle particelle.
- Il diagramma di "Voronoi" relativo al fotogramma $n = 10000$. Questo elemento ci aiuterà a descrivere ed interpretare la concentrazione preferenziale di particelle nel flusso turbolento, relativo alla simulazione in esame.

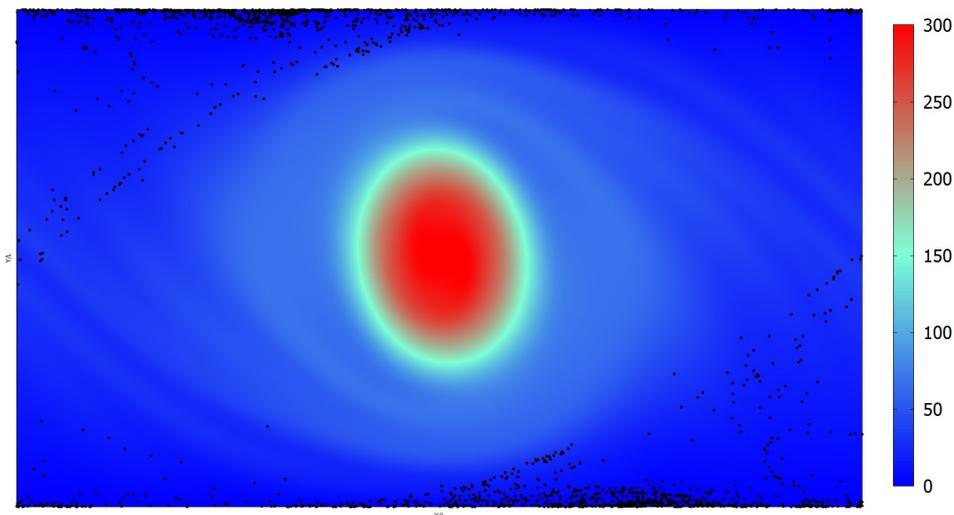
Ricordiamo che nel caso più semplice e comune, quello del piano, dato un insieme finito di punti S , il diagramma di Voronoi per S è la partizione del piano che associa una regione $V(p)$ ad ogni punto $p \in S$ in modo tale che tutti i punti del perimetro di $V(p)$ siano più vicini a p che ad ogni altro punto in S .

5.2 Simulazione 1

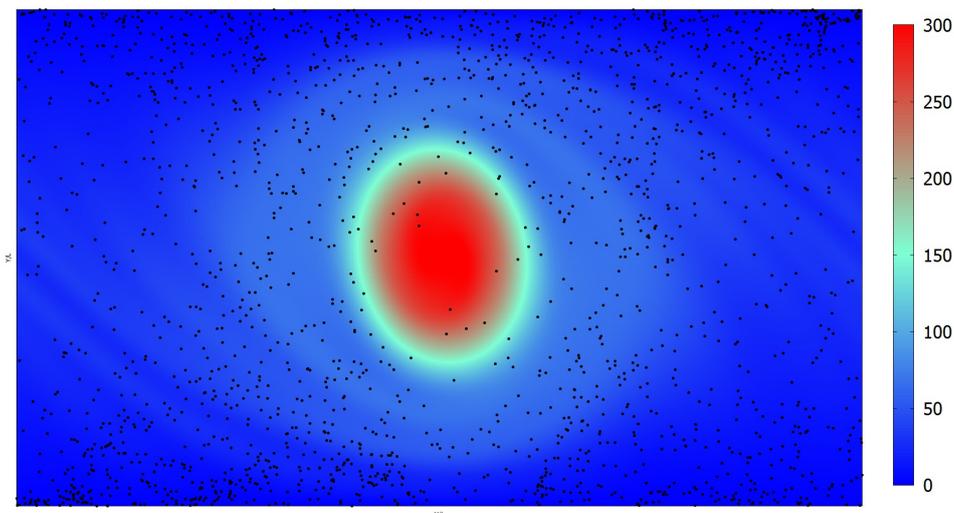
Riportiamo per prima cosa, la sovrapposizione del campo di vorticità della prima simulazione (ottenuta per un mixing-layer a $Re = 100, U_\infty = 25$) con le distribuzioni delle particelle aventi rispettivamente $D_p = 0.001$ e $D_p = 0.01$.

La vorticità è quantificata nel grafico bidimensionale tramite una mappa di colori ove il Blu scuro rappresenta dei valori nulli di vorticità, mentre il rosso dei valori prossimi alle 300 unità. Ricordiamo che le unità di misura di ogni grandezza fisica data come input è adimensionale, di conseguenza anche tale valore rappresenta una quantità adimensionale.

Si può facilmente notare come i valori massimi della vorticità siano concentrati al centro del dominio, mentre appena ci si allontana dal centro i valori di vorticità si riducono drasticamente, fino ad arrivare a dei valori nulli in prossimità dei bordi. Il comportamento di tale grandezza sembra quindi essere coerente con i valori in input riferiti ad una velocità e ad un numero di Reynolds adimensionali molto bassi.



(a) Mixing-layer $Re = 100, U_\infty = 25$; Per particelle aventi $D_p = 0.001$



(b) Mixing-layer $Re = 100, U_\infty = 25$; Per particelle aventi $D_p = 0.01$

5.2.1 Distribuzione temporale per particelle aventi $D_p = 0.001$

Riportiamo ora 8 fotogrammi rappresentativi l'evoluzione temporale della dispersione dei sedimenti nella prima simulazione ottenuta per $Re = 100$, $D_p = 0.001$, $U_\infty = 25$.

Appoggiando sopra il campo di moto dato dallo shear-layer completamente sviluppato una distribuzione casuale di particelle, andiamo ad analizzare come esse si lasciano trasportare dalle correnti fluide. In partenza notiamo subito che le particelle cominciano ad organizzarsi in dei vortici già nella prima migliaia di time-step. Questa velocissima risposta trova sicuramente giustificazione nel valore molto basso di diametro D_p del set.

L'interesse principale ricade sul fotogramma che rappresenta il time-Step n 10000. Da esso infatti avremo la possibilità di analizzare e valutare tramite un diagramma di "Voronoi" come e dove le particelle si saranno distribuite nel dominio in esame.

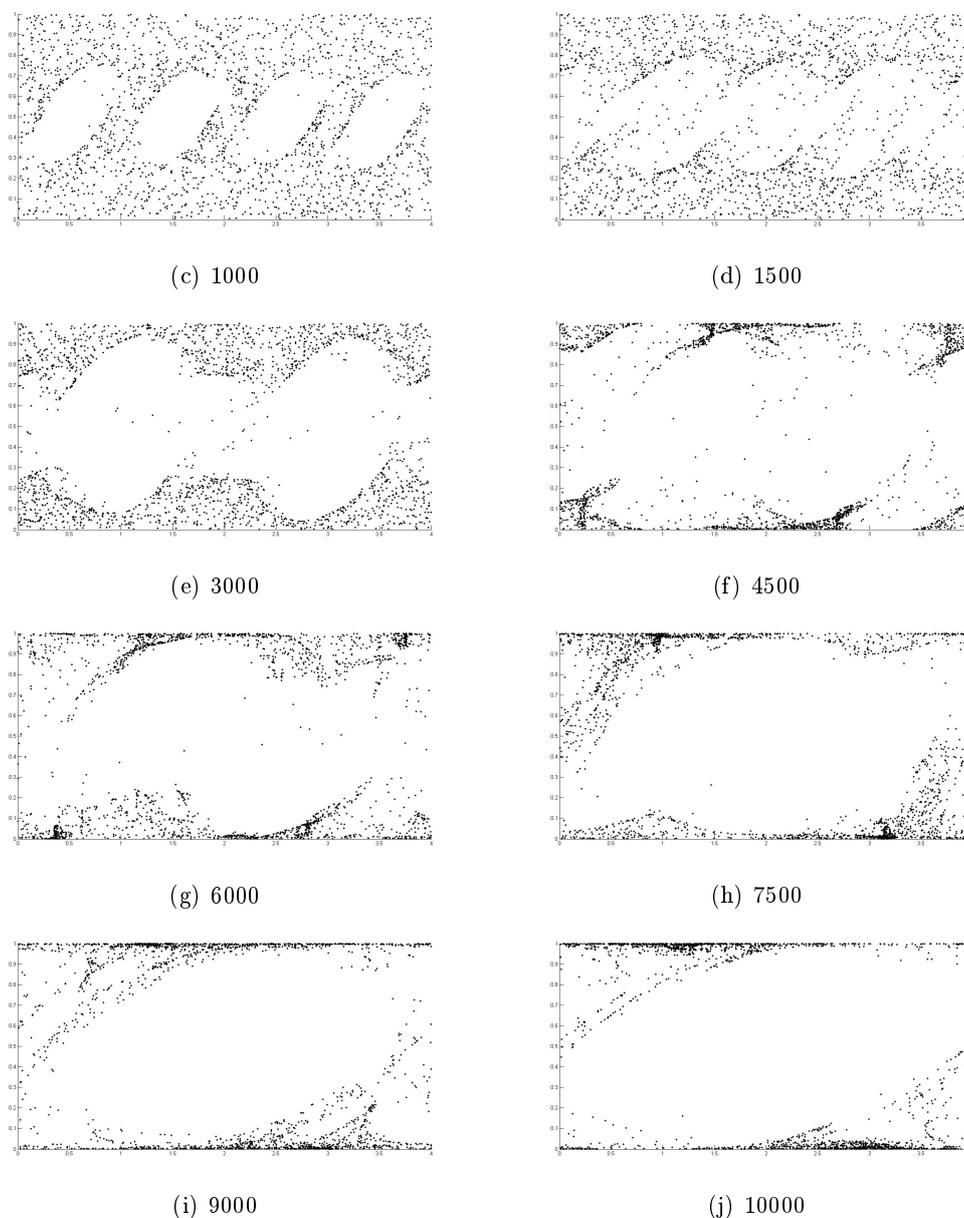


Figura 7: Evoluzione della distribuzione delle particelle con diametro $D_p = 0.001$ nel tempo per mixing layer a $Re = 100$ e velocità $U_\infty = 25$

5.2.2 Distribuzione temporale per particelle aventi $D_p = 0.01$

Riportiamo ora 8 fotogrammi rappresentativi l'evoluzione temporale della dispersione dei sedimenti nella prima simulazione ottenuta per $Re = 100$, $D_p = 0.01$, $U_\infty = 25$.

In questo caso possiamo notare come le particelle non si siano ancora organizzate dopo la prima migliaia di time-step. Esse infatti hanno un diametro 10 volte superiore a quello del primo set, aspetto che le porta a subire una forza di Drag più debole, che influenza in maniera meno significativa la loro quantità di moto.

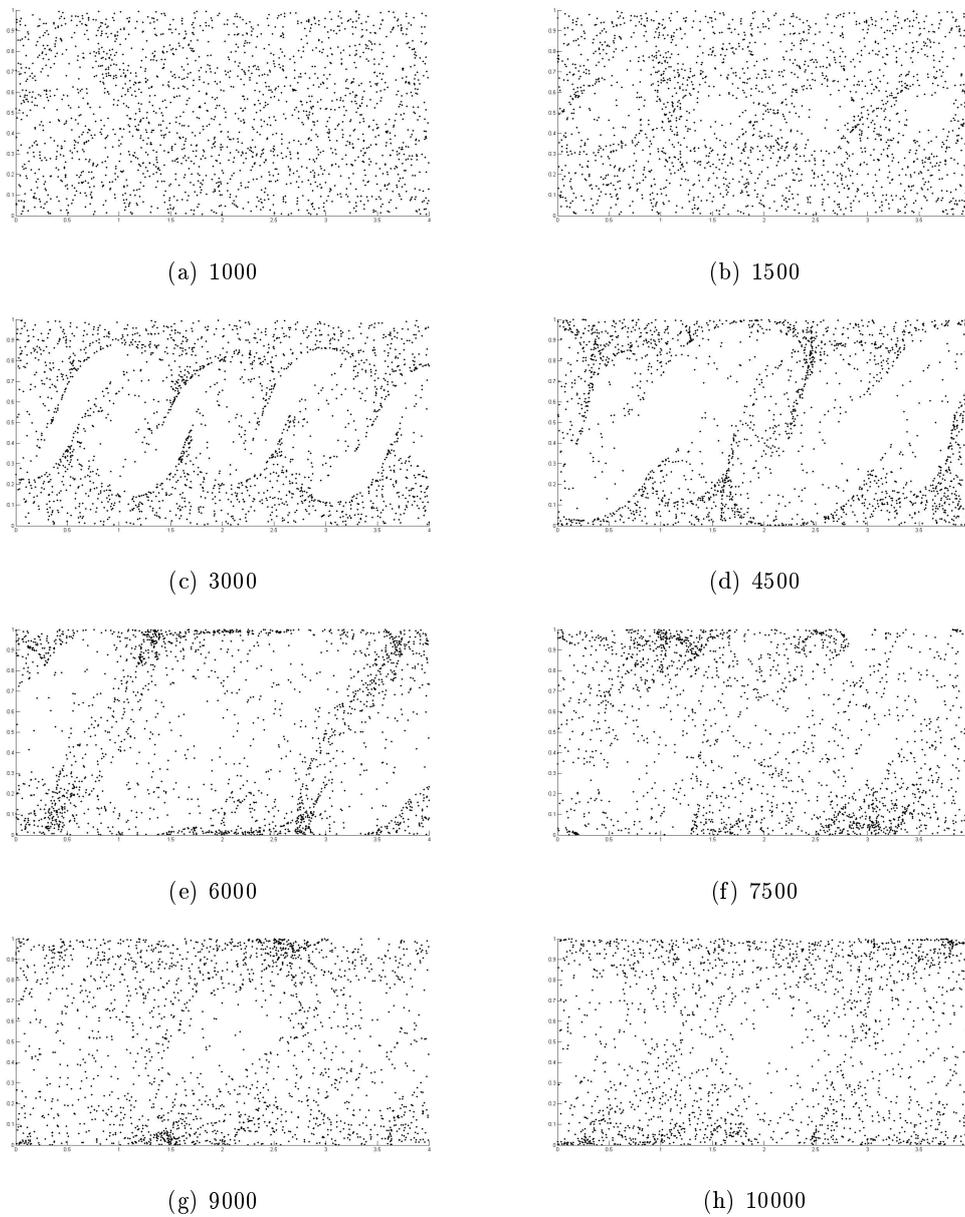


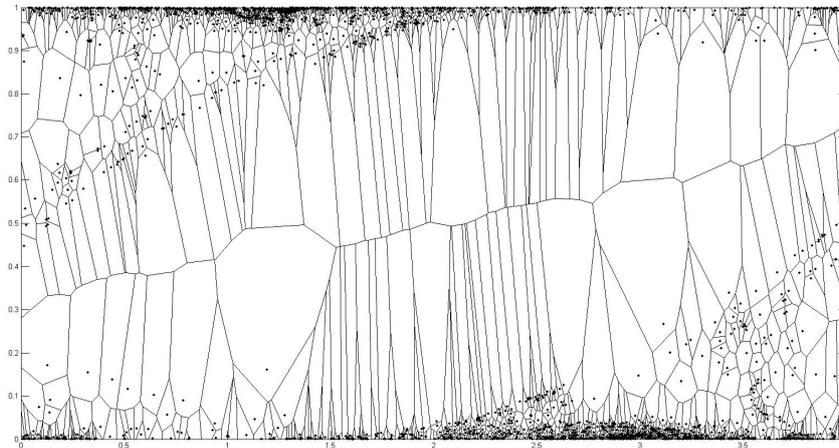
Figura 8: Evoluzione della distribuzione delle particelle con diametro $D_p = 0.01$ nel tempo per mixing layer a $Re = 100$ e velocità $U_\infty = 25$

5.2.3 Diagrammi di Voronoi

Ottenuta l'evoluzione temporale delle particelle per entrambi i set immersi nello stesso campo di moto, concentriamo la nostra attenzione sui fotogrammi relativi al time-step $n = 10000$.

Più precisamente facciamo uso del diagramma di "Voronoi".

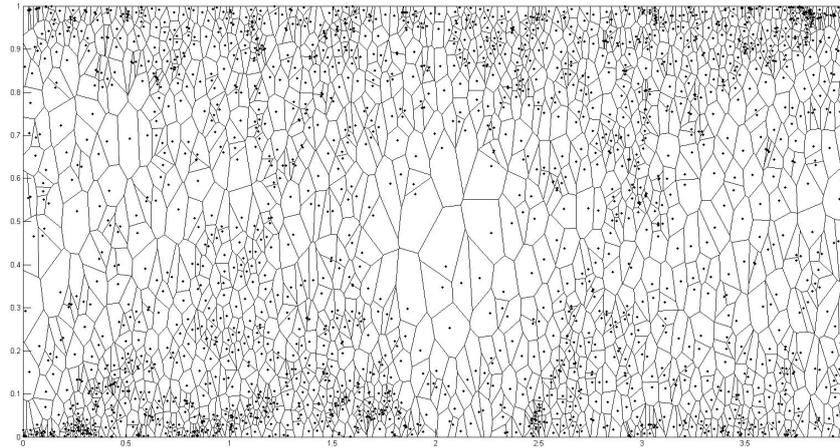
Abbiamo detto che il diagramma di Voronoi associa ad ogni punto, quindi ad ogni particella, una superficie delimitata da un perimetro. Tale perimetro è definito in modo tale che tutti i punti siano più vicini alla particella presa in esame che alle altre particelle presenti nella distribuzione. Capito il concetto, possiamo andare a correlare il valore della superficie che contiene una singola particella, con un presunto valore di concentrazione preferenziale. A prima vista quindi, possiamo confrontare le diverse concentrazioni preferenziali della particelle per i vari set, banalmente osservando l'estensione delle aree che contornano le singole particelle. L'informazione sulla grandezza si limiterà ad essere relativa tra i vari casi, ma ci basterà per costruire una buona analisi dei nostri risultati.



(a) Diagramma di Voronoi per time-step $n = 10000$ delle particelle con diametro $D_p = 0.001$ nel tempo per mixing layer a $Re = 100$ e velocità $U_\infty = 25$

Per il primo diagramma relativo al time-step $n = 10000$ delle particelle con diametro $D_p = 0.001$, osserviamo che la concentrazione preferenziale risulta essere massima agli estremi del dominio. Più precisamente in alto a sinistra e in basso a destra. Al centro del dominio invece, abbiamo la concentrazione preferenziale più bassa. Tali risultati sembrano congruenti con il campo di moto dello shear-layer :

- al centro, incontriamo i valori più alti di vorticità, in grado di conferire alle particelle delle forze più alte e quindi una significativa variazione della quantità di moto.
- mentre agli estremi incontreremo i valori più bassi di vorticità, dove la quantità di moto delle particelle sarà meno influenzata dal campo di moto del fluido.



(b) Diagramma di Voronoi per time-step $n = 10000$ delle particelle con diametro $D_p = 0.01$ nel tempo per mixing layer a $Re = 100$ e velocità $U_\infty = 25$

Contemporaneamente, per il secondo set relativo alle particelle con diametro $D_p = 0.01$ il diagramma di Voronoi presenta delle distribuzioni di concentrazione molto meno accentuate. Basando la nostra osservazione sulla grandezza delle aree, ai confini del dominio le aree rimangono ancora molto concentrate e piccole ma contemporaneamente, nella zona centrale non rimangono dominanti gli stessi valori di aree che comparivano nel diagramma precedente.

Possiamo osservare comunque, che i valori minimi di concentrazione preferenziale delle particelle risultano essere anche in questo caso localizzate al centro del dominio. Più precisamente dove prevalgono i valori di vorticità più elevati.

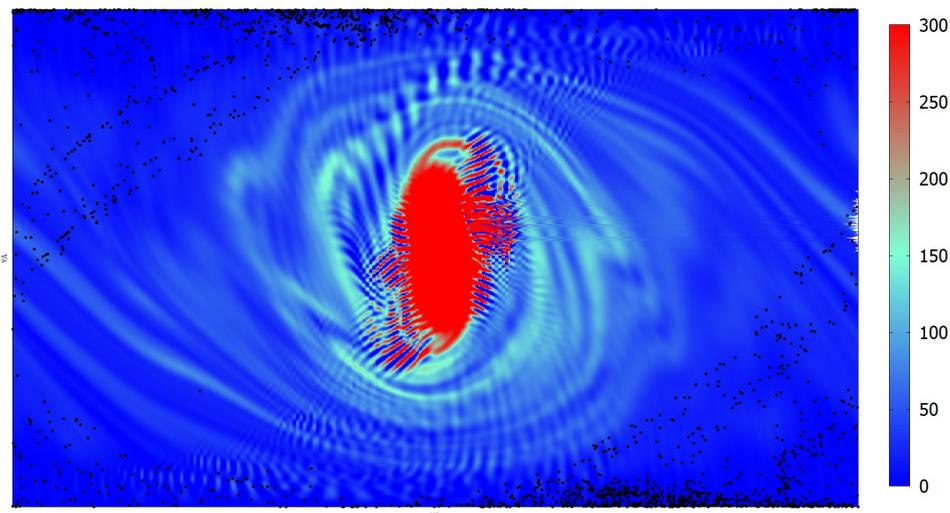
Per giustificare tale differenza, tra i due diagrammi precedenti, possiamo pensare che il nuovo valore di D_p delle particelle, combinato al numero di Reynolds Re protagonista nella simulazione, abbia influenzato il valore della forza di Drag, diminuendola. Questa diminuzione comporta in accordo con la 2 legge di Newton ad una minore accelerazione delle particelle, quindi ad un moto più lento ed omogeneo.

5.3 Simulazione 2

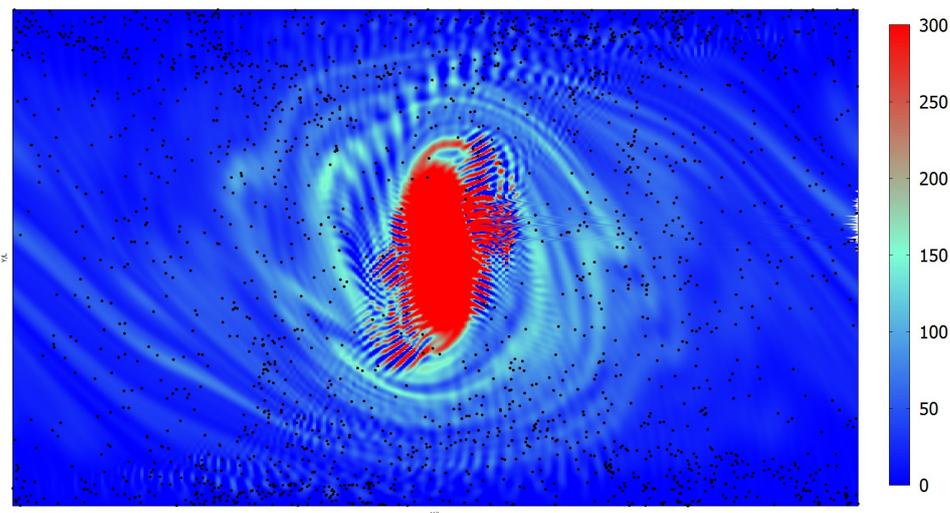
Ricominciamo con la 2 simulazione. Partiamo dai grafici della sovrapposizione del campo di vorticità (ottenuta per un mixing-layer a $Re = 1000, U_\infty = 25$) con le distribuzioni delle particelle aventi rispettivamente $D_p = 0.001$ e $D_p = 0.01$.

La vorticità è quantificata nel grafico bidimensionale tramite una mappa di colori ove il Blu scuro rappresenta dei valori nulli di vorticità, mentre il rosso dei valori prossimi alle 300 unità. Ricordiamo che le unità di misura di ogni grandezza fisica data come input è adimensionale, di conseguenza anche tale valore rappresenta una quantità adimensionale.

Si può facilmente notare come i valori massimi della vorticità siano concentrati ancora una volta al centro del dominio, mentre allontanandosi dal centro i valori di vorticità si riducono drasticamente, fino ad arrivare a dei valori nulli in prossimità dei bordi. Il comportamento di tale grandezza sembra quindi essere coerente con i valori riferiti ad una velocità e ad un numero di Reynolds adimensionali dati come input.



(c) Mixing-layer $Re = 1000, U_\infty = 25$; Per particelle aventi $D_p = 0.001$



(d) Mixing-layer $Re = 1000, U_\infty = 25$; Per particelle aventi $D_p = 0.01$

5.3.1 Distribuzione temporale per particelle aventi $D_p = 0.001$

Riportiamo ora 8 fotogrammi rappresentativi l'evoluzione temporale della dispersione dei sedimenti nella seconda simulazione ottenuta per $Re = 1000$, $D_p = 0.001$, $U_\infty = 25$. Appoggiando sopra il campo di moto dato dallo shear-layer completamente sviluppato una distribuzione casuale di particelle, andiamo ad analizzare come esse si lasciano trasportare dalle correnti fluide. Anche in questo caso notiamo subito che le particelle cominciano ad organizzarsi in dei vortici già nella prima migliaia di time-step. Questa velocissima risposta trova sicuramente giustificazione nel valore molto basso di diametro D_p del set.

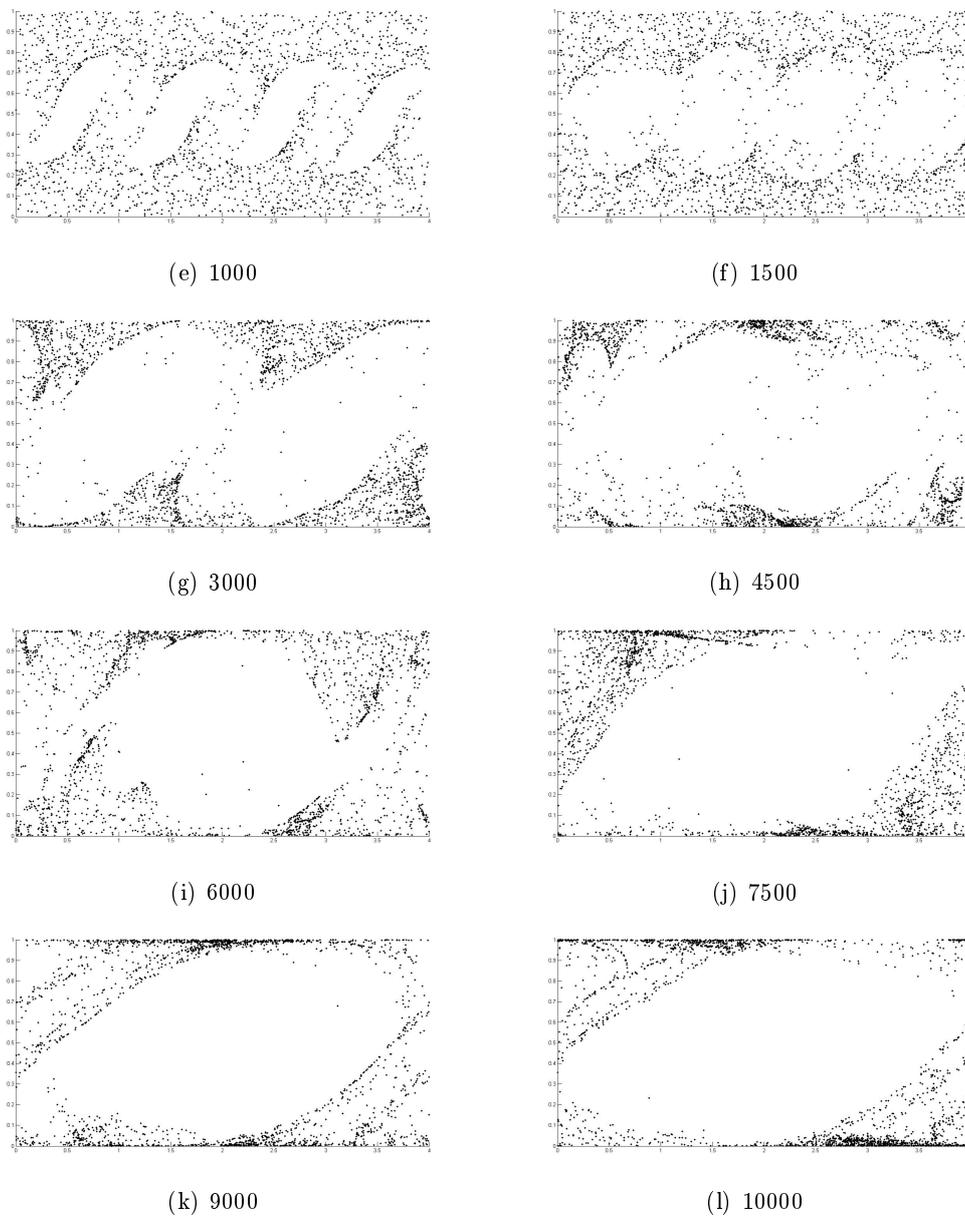


Figura 9: Evoluzione della distribuzione delle particelle con diametro $D_p = 0.001$ nel tempo per mixing layer a $Re = 1000$ e velocità $U_\infty = 25$

5.3.2 Distribuzione temporale per particelle aventi $D_p = 0.01$

Riportiamo ora 8 fotogrammi rappresentativi l'evoluzione temporale della dispersione dei sedimenti nella seconda simulazione ottenuta per $Re = 1000$, $D_p = 0.01$, $U_\infty = 25$.

Ancora, in completa analogia con la prima simulazione, possiamo notare come le particelle non si sono ancora lasciate trasportare, dopo la prima migliaia di time-step. Esse infatti hanno un diametro 10 volte superiore a quello del primo set, aspetto che le porta a subire una forza di Drag più debole, che influenza in maniera meno significativa la loro quantità di moto.

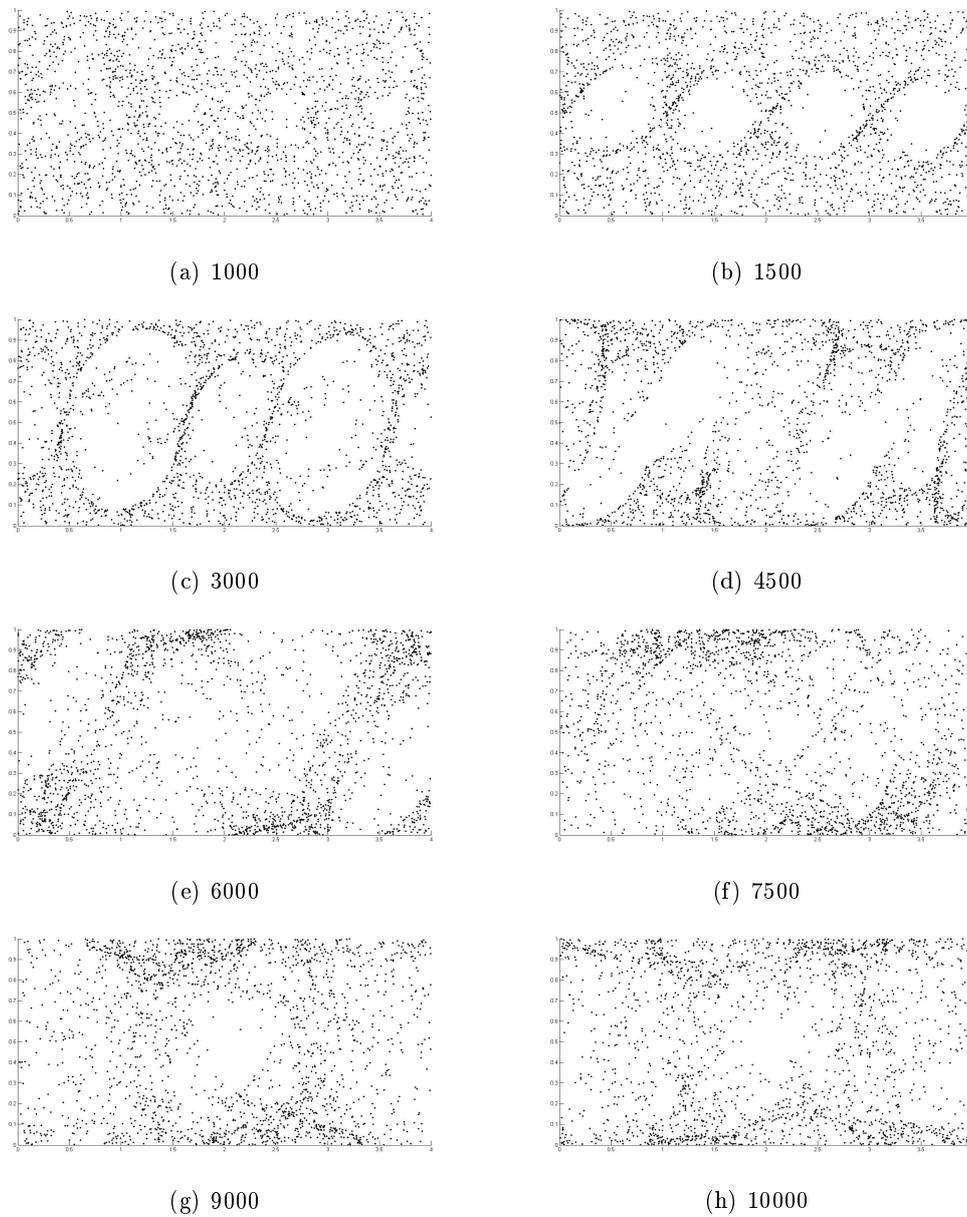
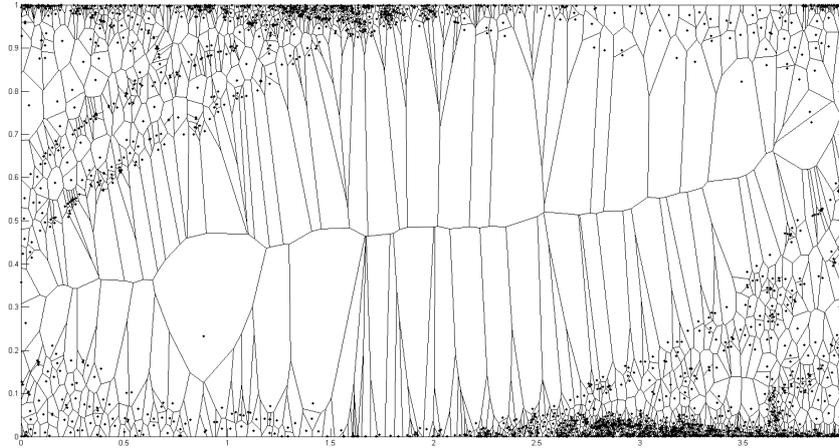


Figura 10: Evoluzione della distribuzione delle particelle con diametro $D_p = 0.01$ nel tempo per mixing layer a $Re = 1000$ e velocità $U_\infty = 25$

5.3.3 Diagrammi di Voronoi

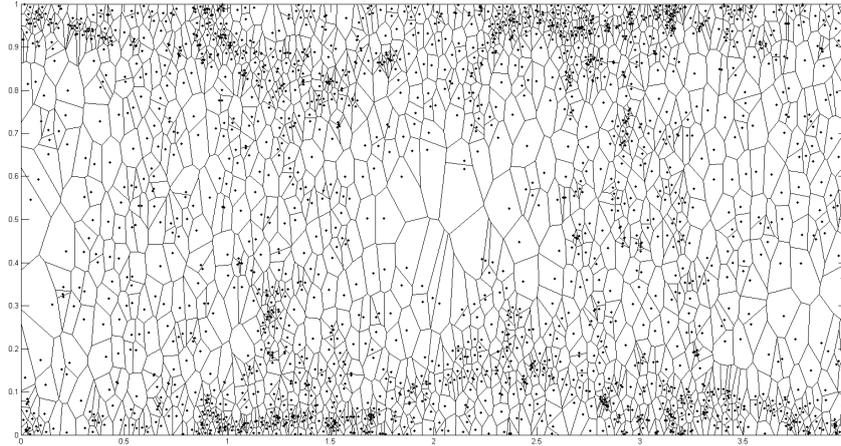
Ottenuta l'evoluzione temporale delle particelle per entrambi i set immersi nello stesso campo di moto, concentriamo la nostra attenzione sui fotogrammi relativi al time-step $n = 10000$. Utilizziamo nuovamente i diagrammi di Voronoi per discutere una valutazione relativa della concentrazione preferenziale delle particelle all'interno del dominio considerato, per i due differenti valori di diametri.



(a) Diagramma di Voronoi per time-step $n = 10000$ delle particelle con diametro $D_p = 0.001$ nel tempo per mixing layer a $Re = 1000$ e velocità $U_\infty = 25$

Per il primo diagramma relativo al time-step $n = 10000$ delle particelle con diametro $D_p = 0.001$, osserviamo che la concentrazione preferenziale continua ad essere massima agli estremi del dominio. Più precisamente in alto a sinistra e in basso a destra. Al centro del dominio invece, abbiamo la concentrazione preferenziale più bassa. Tali risultati continuano ad essere congruenti con il campo di moto dello shear-layer :

- al centro, incontriamo i valori più alti di vorticità, in grado di conferire alle particelle delle forze più alte e quindi una significativa variazione della quantità di moto.
- mentre agli estremi incontreremo i valori più bassi di vorticità, dove la quantità di moto delle particelle sarà meno influenzata dal campo di moto del fluido.



(b) Diagramma di Voronoi per time-step $n = 10000$ delle particelle con diametro $D_p = 0.01$ nel tempo per mixing layer a $Re = 1000$ e velocità $U_\infty = 25$

Contemporaneamente, per il secondo set relativo alle particelle con diametro $D_p = 0.01$ il diagramma di Voronoi presenta delle distribuzioni di concentrazione molto meno accentuate. Basando la nostra osservazione sulla grandezza delle aree, ai confini del dominio le aree rimangono ancora molto concentrate e piccole ma contemporaneamente, nella zona centrale non rimangono dominanti gli stessi valori di aree che comparivano nel diagramma precedente.

Possiamo osservare comunque, che i valori minimi di concentrazione preferenziale delle particelle risultano essere anche in questo caso, localizzate al centro del dominio, ove prevalgono valori di vorticità più elevati.

Per giustificare tale differenza, tra i due diagrammi precedenti, possiamo pensare che il nuovo valore di D_p delle particelle, combinato al numero di Reynolds Re protagonista nella simulazione, abbia influenzato il valore della forza di Drag, diminuendola. Questa diminuzione porterà in accordo con la 2 legge di Newton ad una minore accelerazione delle particelle, quindi ad un moto più lento e limitato.

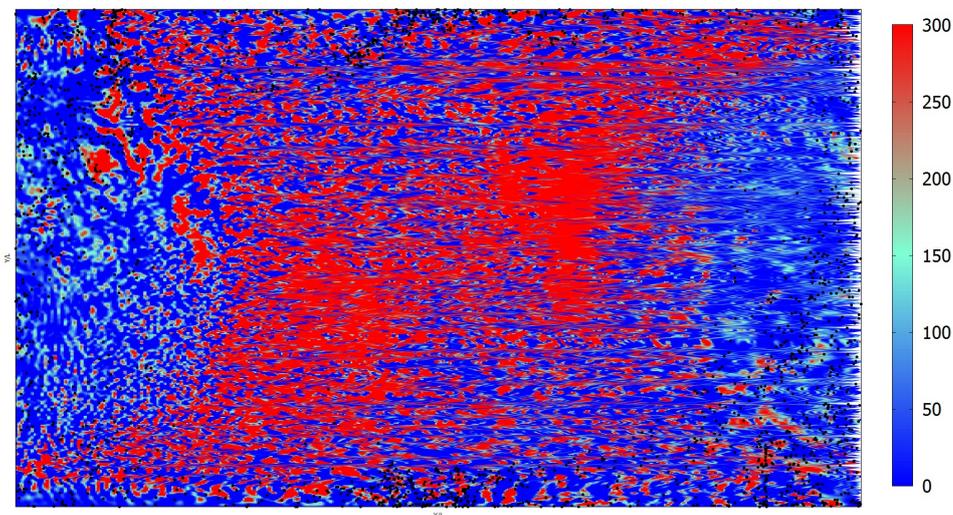
5.4 Simulazione 3

Ricominciamo con la 3 simulazione. Partiamo dai grafici della sovrapposizione del campo di vorticità (ottenuta per un mixing-layer a $Re = 10000, U_\infty = 25$) con le distribuzioni delle particelle aventi rispettivamente $D_p = 0.001$ e $D_p = 0.01$.

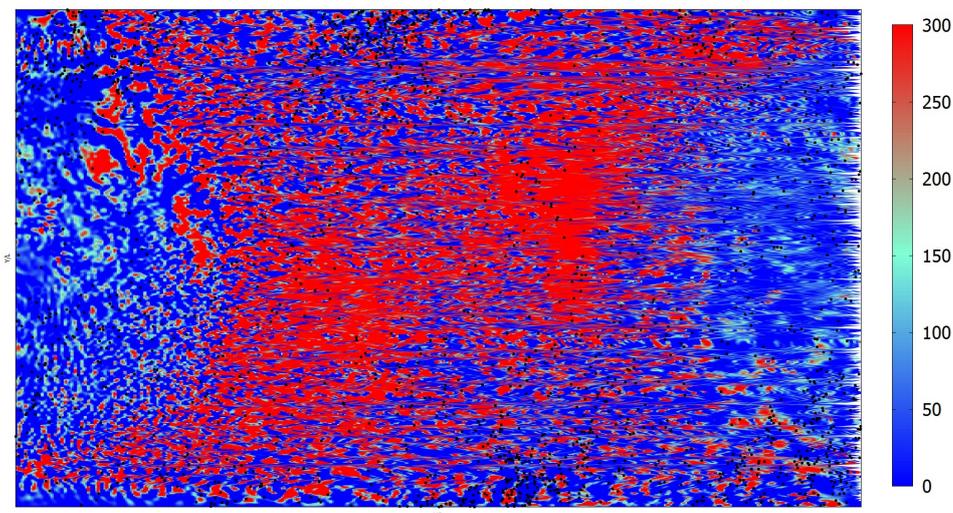
La vorticità è quantificata nel grafico bidimensionale tramite una mappa di colori ove il Blu scuro rappresenta dei valori nulli di vorticità, mentre il rosso dei valori prossimi alle 300 unità. Ricordiamo che le unità di misura di ogni grandezza fisica data come input è adimensionale, di conseguenza anche tale valore rappresenta una quantità adimensionale.

In questo terzo caso, il valore altissimo del numero di Reynolds, comporta una distribuzione del campo di vorticità molto diversa dai casi precedenti. Si nota immediatamente come i valori massimi di vorticità non siano più localizzati ad una ben precisa regione di spazio, ma siano distribuiti senza una apparente continuità nella maggior parte del dominio.

Tale risultato sembra essere in pieno accordo con il valore altissimo del numero di Reynolds, autore di moti turbolenti irregolari.



(c) Mixing-layer $Re = 10000, U_\infty = 25$; Per particelle aventi $D_p = 0.001$



(d) Mixing-layer $Re = 10000, U_\infty = 25$; Per particelle aventi $D_p = 0.01$

5.4.1 Distribuzione temporale per particelle aventi $D_p = 0.001$

Riportiamo ora 8 fotogrammi rappresentativi l'evoluzione temporale della dispersione dei sedimenti nella terza simulazione ottenuta per $Re = 10000$, $D_p = 0.001$, $U_\infty = 25$.

Appoggiando sopra il campo di moto dato dallo shear-layer completamente sviluppato una distribuzione casuale di particelle, andiamo ad analizzare come esse si lasciano trasportare dalle correnti fluide.

Osserviamo subito come da fotogramma a fotogramma, le particelle assumano posizioni completamente diverse. Possiamo giustificare questo comportamento pensando ancora una volta a come l'elevatissimo numero di Reynolds vada ad influenzare in maniera significativa la forza di Drag applicata alla singola particella. Forza che per il secondo principio della dinamica si trasforma in accelerazione e quindi a spostamento delle particelle.

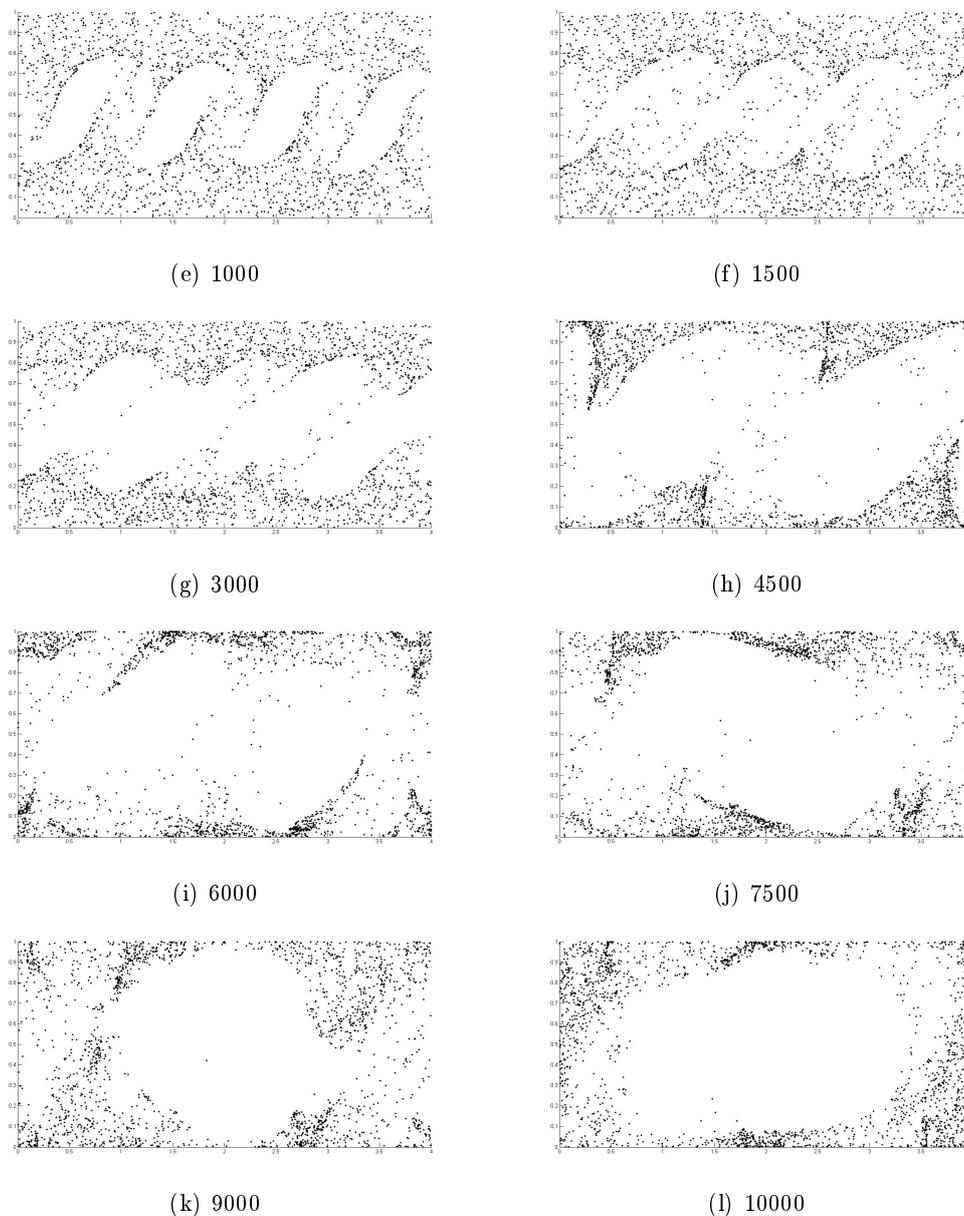


Figura 11: Evoluzione della distribuzione delle particelle con diametro $D_p = 0.001$ nel tempo per mixing layer a $Re = 10000$ e velocità $U_\infty = 25$

5.4.2 Distribuzione temporale per particelle aventi $D_p = 0.01$

Riportiamo ora 8 fotogrammi rappresentativi l'evoluzione temporale della dispersione dei sedimenti nella terza simulazione ottenuta per $Re = 10000$, $D_p = 0.01$, $U_\infty = 25$.

Ancora, in completa analogia con la prima simulazione, possiamo notare che le particelle non si sono ancora lasciate trasportare, dopo la prima migliaia di time-step. Esse infatti hanno un diametro 10 volte superiore a quello del primo set, aspetto che le porta a subire una forza di Drag più debole, che influenza in maniera meno significativa la loro quantità di moto.

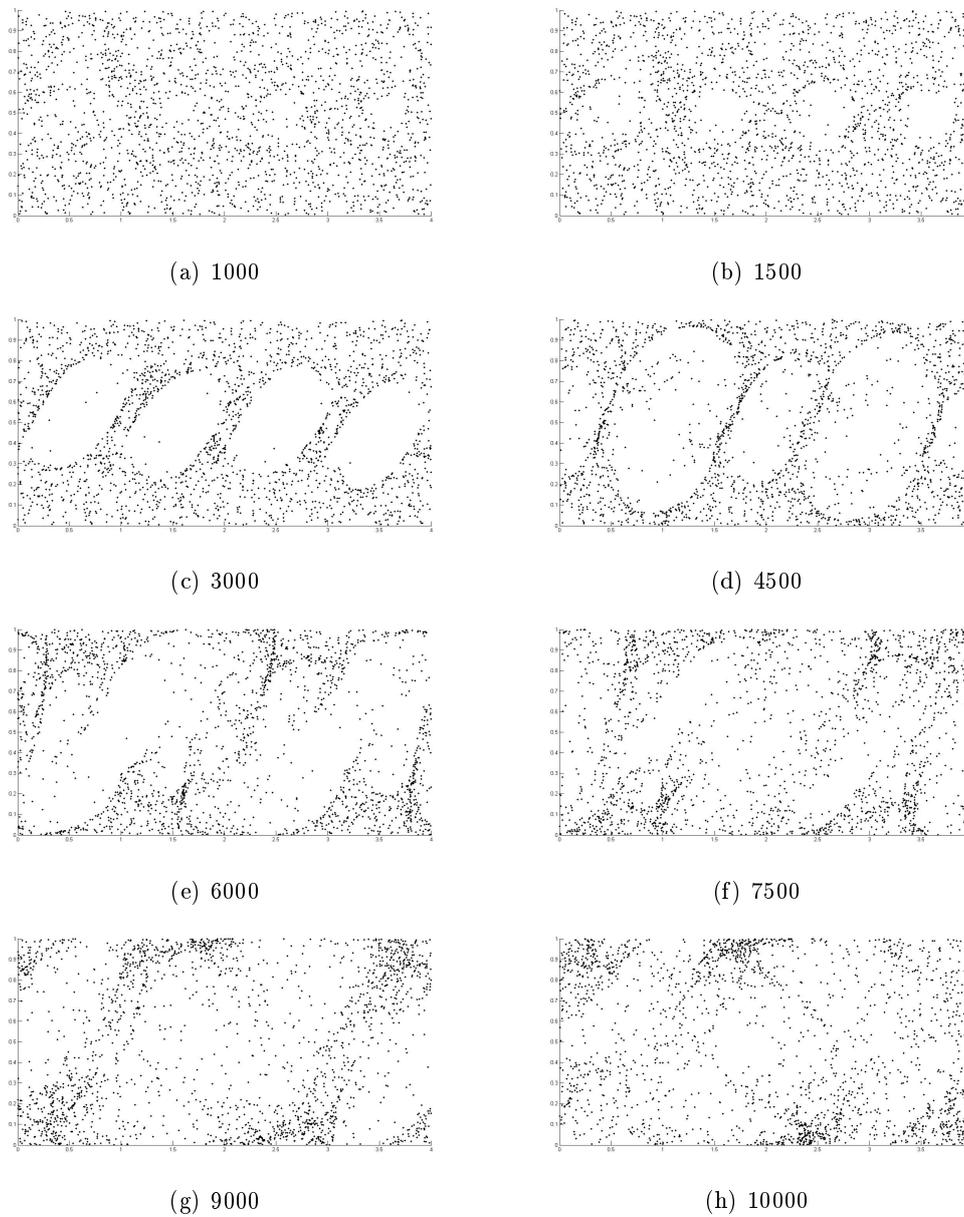
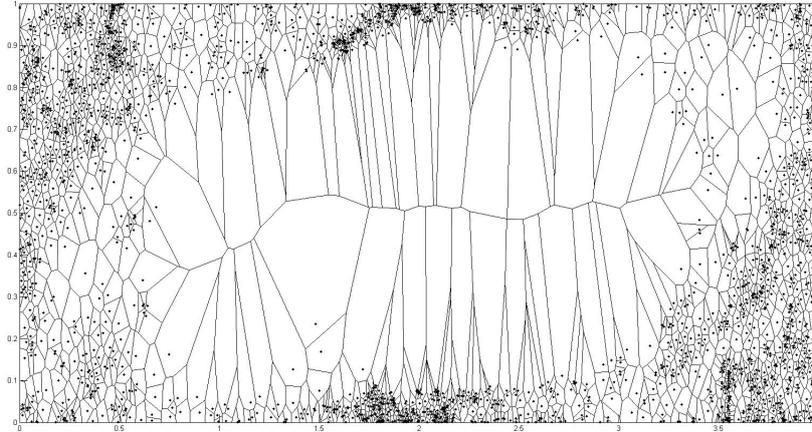


Figura 12: Evoluzione della distribuzione delle particelle con diametro $D_p = 0.01$ nel tempo per mixing layer a $Re = 10000$ e velocità $U_\infty = 25$

5.4.3 Diagrammi di Voronoi

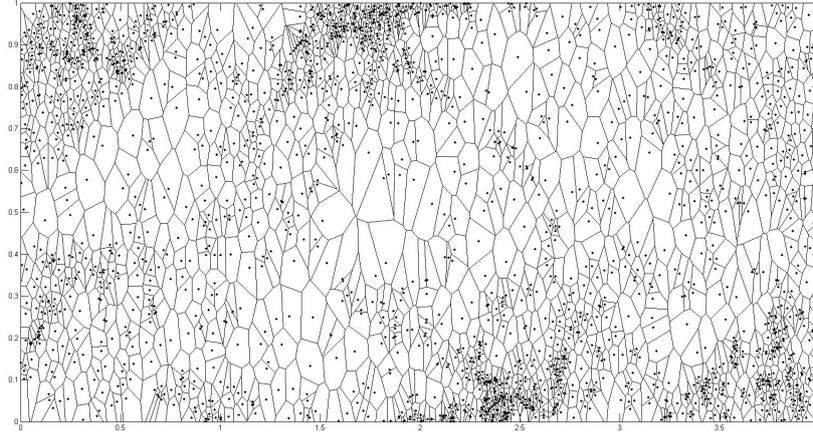
Ottenuta l'evoluzione temporale delle particelle per entrambi i set immersi nello stesso campo di moto, concentriamo la nostra attenzione sui fotogrammi relativi al time-step $n = 10000$. Utilizziamo ancora una volta i diagrammi di Voronoi per sviluppare una valutazione relativa della concentrazione preferenziale delle particelle all'interno del dominio considerato, per i due differenti valori di diametri.



(a) Diagramma di Voronoi per time-step $n = 10000$ delle particelle con diametro $D_p = 0.001$ nel tempo per mixing layer a $Re = 10000$ e velocità $U_\infty = 25$

Per il primo diagramma relativo al time-step $n = 10000$ delle particelle con diametro $D_p = 0.001$, osserviamo che la concentrazione preferenziale continua ad essere massima agli estremi del dominio. Al centro del dominio invece, abbiamo la concentrazione preferenziale più bassa. Tali risultati continuano ad essere congruenti con il campo di moto dello shear-layer :

- al centro, incontriamo i valori più alti di vorticità, in grado di conferire alle particelle delle forze più alte e quindi una significativa variazione della quantità di moto.
- agli estremi invece, continuano in analogia con i casi precedenti i valori più bassi di vorticità, anche se in questo caso possiamo notare come in corrispondenza di alcuni massimi relativi della vorticità le rispettive concentrazioni preferenziali si comportino di conseguenza.



(b) Diagramma di Voronoi per time-step $n = 10000$ delle particelle con diametro $D_p = 0.01$ nel tempo per mixing layer a $Re = 10000$ e velocità $U_\infty = 25$

Contemporaneamente, per il secondo set relativo alle particelle con diametro $D_p = 0.01$ il diagramma di Voronoi presenta delle distribuzioni di concentrazione ancora molto meno accentuate rispetto al diagramma precedente.

5.5 Confronto tra le diverse distribuzioni preferenziali

Ora, esposti tutti i risultati delle varie simulazioni, raggruppiamo i diagrammi di Voronoi, per confrontarli. Più precisamente, ci interessa individuare ed analizzare nel dettaglio come e perchè abbiamo ottenuto tali risultati in funzione della variazione dei parametri scelti.

Partiamo riproponendo la definizione di diagramma di Voronoi e di come essa ci aiuti ad individuare la concentrazione preferenziale delle particelle.

"Abbiamo detto che il diagramma di Voronoi associa ad ogni punto, quindi ad ogni particella, una superficie delimitata da un perimetro. Tale perimetro è definito in modo tale che tutti i punti siano più vicini alla particella presa in esame che alle altre particelle presenti nella distribuzione.

Capito il concetto, possiamo andare a correlare il valore della superficie che contiene una singola particella, con un presunto valore di concentrazione preferenziale. A prima vista quindi, possiamo confrontare le diverse concentrazioni preferenziali della particelle per i vari set, banalmente osservando l'estensione delle aree che contornano le singole particelle. L'informazione sulla grandezza si limiterà ad essere relativa tra i vari casi, ma ci basterà per costruire una buona analisi dei nostri risultati."

Poi, riportiamo la formulazione delle equazioni che governano il tracciamento lagrangiano delle particelle, ed analizziamo come il parametro di Stokes, protagonista per la descrizione delle diverse concentrazioni preferenziali, varia nelle varie simulazioni.

$$F_D = -\frac{3}{4} \frac{C_D}{d_p} \left(\frac{\rho_f}{\rho_p}\right) |u_p - u_{f@p}| (u_p - u_{f@p}) \quad (70)$$

$$C_D = \frac{24}{Re_p} (1 + 0.15 Re_p^{0.687}) \quad (71)$$

$$Re_f = \frac{U_\infty^2 l_z}{\nu_f} \quad (72)$$

$$Re_p = \frac{D_p |u_p - u_{f@p}|}{\nu_f} \quad (73)$$

$$St = \frac{R_{opp} D_{p,add}^2}{18} \quad (74)$$

dove abbiamo indicato con:

- F_D la forza di Drag
- $R_{opp} = \frac{\rho_p}{\rho_f}$ il rapporto tra densità che compare nel numero di Stokes
- u_p la velocità della particella
- $u_{f@p}$ la velocità del fluido nella posizione della particella
- Re_p il numero di reynolds riferito alle particelle
- Re_f il numero di reynolds riferito al fluido

Al variare delle simulazioni, quello che varia è il numero di reynolds associato al fluido Re_f . Esso però, per come vengono modificati i parametri di Input (ricordo che U_∞^2 e l_z rimangono fissi), può essere definito come

$$Re_f = \frac{U_\infty^2 l_z}{\nu_f} = \frac{25 \cdot 1}{\nu_f} = \frac{25}{\nu_f} = \frac{25 \rho_f}{\mu_f} \quad (75)$$

Dove anche il termine ρ_f è fissato dai dati in input, tramite il parametro R_{opp} . Allora elaborando nuovamente la formulazione del parametro di Stokes, mettendo in evidenza il termine μ_f :

$$St = \frac{\tau_p}{\tau_f} = \frac{\rho_p D_p^2 U_\infty^2}{18 \mu_f \nu_f} = \frac{\rho_p D_p^2 U_\infty^2 \rho_f}{18 \mu_f \mu_f} = \frac{\rho_p D_p^2 U_\infty^2 \rho_f}{18} \frac{1}{\mu_f^2} \quad (76)$$

Otteniamo la relazione con il parametro di Stokes:

- un elevato numero di Re_f in input, a parità di diametro D_p delle particelle, comporta un valore molto piccolo di μ_f . Esso, comporta dei valori alti del parametro di Stokes.
- Mentre, un numero di Re_f in input basso, a parità di diametro D_p delle particelle, comporta un valore molto alto di μ_f . Esso, comporta dei valori bassi del parametro di Stokes.

Riportando in breve il significato fisico del numero di Stokes,

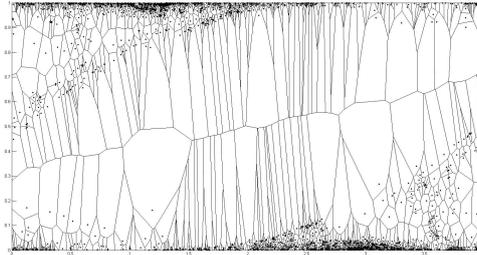
- le particelle aventi un basso numero di Stokes, seguono le linee di flusso fluide (perfetta avvezione). Più precisamente le traiettorie delle particelle, seguiranno nel dettaglio le linee di flusso del fluido, anche nelle regioni di dominio ove il fluido subisce drastiche accelerazioni o decelerazioni
- le particelle con un numero di Stokes alto, vengono dominate dalla loro inerzia, quindi non seguiranno le linee di flusso con accuratezza, ma devieranno, soprattutto nelle regioni di dominio ove il fluido subisce i valori più alti di accelerazione o decelerazione.

Facendo utilizzo di tali osservazioni analitiche, siamo in grado di valutare e giustificare come e perchè al variare del numero di Reynolds associato al fluido Re_f otteniamo diverse concentrazioni preferenziali.

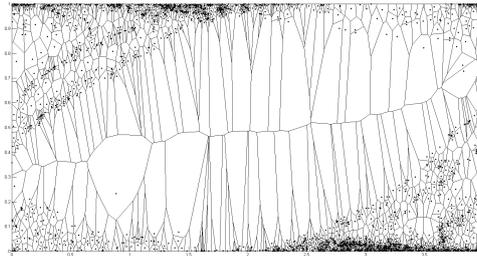
5.5.1 Concentrazione preferenziale per $D_p = 0.001$

Cominciamo con il set avente $D_p = 0.001$. Abbiamo dimostrato come al crescere del numero di Reynolds associato al fluido Re_f cresce di conseguenza anche il parametro di Stokes. Ci aspettiamo allora, che all'aumentare del parametro di Reynolds le particelle immerse nel fluido si lascino influenzare sempre meno dal campo di moto del fluido. Portando, in accordo con i risultati visibili dai diagrammi di Voronoi, a delle concentrazioni preferenziali sempre meno accentuate ai bordi del dominio spaziale. Tale risultato va correlato alla grandezza preferenziale delle aree.

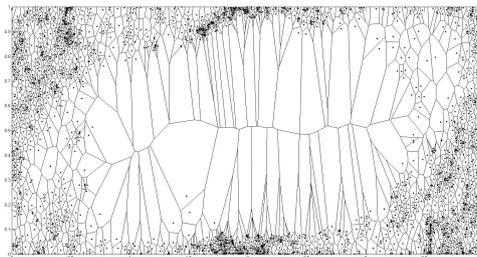
Ovviamente al centro del dominio le aree e quindi le concentrazioni preferenziali delle particelle, rimangono costanti al variare del numero di Reynolds. In quella regione di dominio infatti, il campo di moto è molto accentuato e le particelle, che sono caratterizzate da un diametro molto piccolo, si lasciano facilmente trascinare ai bordi.



(c) ottenuta per un mixing-layer a $Re = 100, U_\infty = 25$



(d) ottenuta per un mixing-layer a $Re = 1000, U_\infty = 25$



(e) ottenuta per un mixing-layer a $Re = 10000, U_\infty = 25$

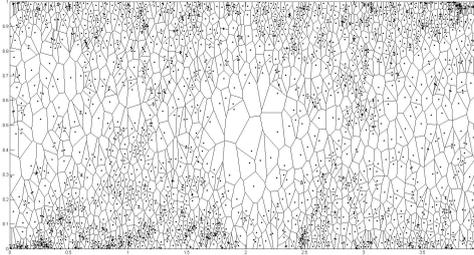
Figura 13: Diagrammi di Voronoi Relativi al Time-step $n = 10000$ per il set di particelle di diametro $D_p = 0.001$ e di rispettivi parametri.

5.5.2 Concentrazione preferenziale per $D_p = 0.01$

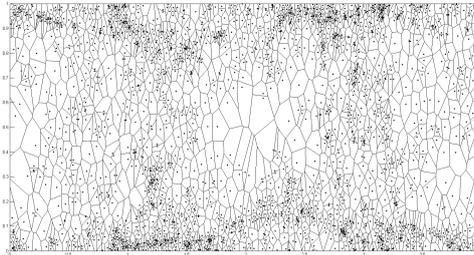
Per quanto riguarda invece il secondo set, avente diametro $D_p = 0.01$, notiamo subito che la concentrazione preferenziale delle particelle ammette ancora un minimo assoluto localizzato al centro del dominio, ma sicuramente non della stessa entità. In questo caso le particelle hanno un diametro 10 volte più grande e quindi, il parametro dei Stokes che le caratterizza, è elevato. Di conseguenza esse non si lasceranno perturbare facilmente dal campo di moto del fluido.

Mantenendo però costante il valore del diametro e aumentando in numero di Reynolds, otteniamo una diminuzione del parametro di Stokes, che in accordo con i diagrammi di Voronoi seguenti, descrive delle particelle che si lasciano influenzare in maniera più significativa dal campo di moto del fluido. La massima concentrazione preferenziale delle particelle, al crescere del numero di Reynolds risulta quindi localizzata a determinate regioni del dominio.

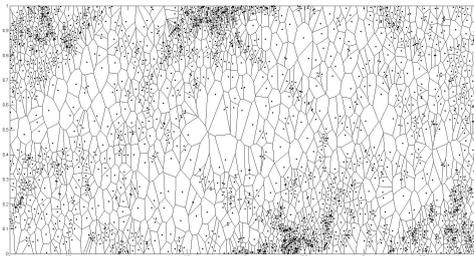
Queste regioni, in questo caso non sono localizzate ai bordi del dominio, ma sono distribuite casualmente, senza un apparente logica. L'ipotesi è che il moto generato da un valore di Reynolds così alto sia puramente turbolento, quindi il campo di moto di non facile interpretazione, ammette dei minimi di velocità in quelle zone.



(a) ottenuta per un mixing-layer a $Re = 100, U_\infty = 25$



(b) ottenuta per un mixing-layer a $Re = 1000, U_\infty = 25$



(c) ottenuta per un mixing-layer a $Re = 10000, U_\infty = 25$

Figura 14: Diagrammi di Voronoi Relativi al Time-step $n = 10000$ per il set di particelle di diametro $D_p = 0.01$ e di rispettivi parametri.

6 Conclusioni

idee

- possibilità di ottenere dei risultati non fisici
- eq del moto gestita solo in funzione della forza di drag, possibili osservazioni per migliorare il tracciamento?