

Soluzioni Homework N° 5: trasferimento di massa

a.

1. Ipotizziamo che la concentrazione di gas all'interfaccia con il liquido rimanga pari a C_{int} lungo tutta la colonna.

Il bilancio di massa scritto per il gas che diffonde nel volume di liquido presente in un tratto dz di colonna è dato da:

$$\frac{dVC}{dt} = Q(z)C(z) - Q(z+dz)C(z+dz) + \quad (1)$$

$$+kA_{int}(C_{int} - C(z)) \quad (2)$$

dove il termine a sinistra rappresenta l'accumulo di massa nel tempo nel volume di controllo e termini a destra rappresentano rispettivamente flussi convettivi in ingresso e uscita al volume di controllo (film di liquido che si muove verso il basso) e il trasferimento attraverso l'interfaccia gas/liquido. In particolare si ha:

- (a) $dVC/dt = 0$ in condizioni di funzionamento a stazionario
 (b) $Q(z) = Q(z+dz)$ per la conservazione della massa del liquido
 (c) $A_{int} = 2\pi(R-\delta)dz \simeq 2\pi R dz$ per l'interfaccia di scambio (superficie cilindrica su cui scorre il film liquido)

dove $C(z)$ è la concentrazione di gas nel liquido alla generica altezza z lungo la colonna. Utilizzando la derivata per riscrivere il flusso convettivo (o utilizzando Taylor per esprimere la concentrazione a $C(z+dz)$) il bilancio di massa diventa:

$$0 = -Q \frac{dC(z)}{dz} dz + k2\pi R dz (C_{int} - C(z)) \quad (3)$$

$$\frac{dC(z)}{dz} = \frac{2\pi k R}{Q} (C_{int} - C(z)) \quad (4)$$

che deve essere integrata separando le variabili:

$$\frac{dC(z)}{C_{int} - C(z)} = \frac{2\pi R D}{Q} 0.69 \left(\frac{z v_0}{D}\right)^{0.5} dz \quad (5)$$

$$\frac{dC(z)}{C_{int} - C(z)} = 0.69 \frac{2\pi R}{Q} \left(\frac{D v_0}{z}\right)^{0.5} dz \quad (6)$$

tra $C(0) = 0$ e $C(L)$ e tra 0 e L . La concentrazione $C(0) = 0$ perché non c'è H_2S nel liquido di lavaggio all'inizio della colonna. Per determinare v_0 si sa che $Q = 2\pi R \delta v_0$ per cui $v_0 = Q/2\pi R \delta$.

2. L'integrazione dell'equazione fornisce:

$$\ln \frac{C_{int} - C(z)}{C_{int} - C(0)} = -\frac{0.69}{v_0 \delta} (D v_0)^{0.5} 2z^{0.5} \quad (7)$$

$$\frac{C_{int} - C(z)}{C_{int} - C(0)} = \exp\left(-\frac{0.69}{v_0 \delta} (D v_0)^{0.5} 2z^{0.5}\right) \quad (8)$$

Per il profilo di concentrazione si ricava:

$$C_{int} - C(z) = \quad (9)$$

$$= (C_{int} - C(0)) \exp\left(-\frac{0.69}{v_0 \delta} (D v_0)^{0.5} 2z^{0.5}\right) \quad (10)$$

$$C(z) = C_{int} \left(1 - \exp\left(-\frac{0.69}{v_0 \delta} (D v_0)^{0.5} 2z^{0.5}\right)\right) \quad (11)$$

e imponendo $C(L) = 0.1 C_{int}$ si può ricavare il valore di L per cui si ha l'assorbimento desiderato.

b.

1. Il fiume è un sistema in flusso convettivo che scambia ossigeno attraverso l'interfaccia con l'aria esterna. Indicata con x la coordinata lungo la direzione del flusso, il bilancio di massa è dato da:

$$\frac{VC(x)}{dx} = Q(x)C(x) - Q(x+dx)C(x+dx) + \quad (12)$$

$$+kA_{int}(C_{sat} - C(x)) \quad (13)$$

dove $C(x)$ è la concentrazione di ossigeno disciolto nell'acqua alla generica posizione x lungo il fiume e C_{sat} è la concentrazione di ossigeno all'interfaccia aria/liquido. Il primo termine è la variazione di massa di ossigeno nel volume di controllo, nulla in condizioni di stazionario. Il bilancio può essere riscritto come:

$$0 = -Q \frac{dC(x)}{dx} dx + k_l A_{int} (C_{sat} - C(x)) \quad (14)$$

dove $Q = Q(x) = Q(x+dx)$ e $A_{int} = w dx$ con w larghezza del fiume. Questa equazione deve essere integrata tra $C(x=0) = 2 \text{ mg/l}$ e $C(L)$.

2. Integrando l'equazione per separazione di variabili si ha:

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{k_l w}{Q} (C_{sat} - C(x)) \quad (15)$$

$$\frac{dC(x)}{C_{sat} - C(x)} = \frac{k_l w}{Q} dx \quad (16)$$

$$\ln \frac{C_{sat} - C(x)}{C_{sat} - C(0)} = -\frac{k_l w}{Q} x \quad (17)$$

$$\frac{C_{sat} - C(x)}{C_{sat} - C(0)} = \exp\left(-\frac{k_l w}{Q} x\right) \quad (18)$$

e la variazione di concentrazione lungo il fiume risulta:

$$C_{sat} - C(x) = (C_{sat} - C(0)) \exp\left(-\frac{k_l w}{uwh} x\right) \quad (19)$$

$$C(x) = C_{sat} - (C_{sat} - C(0)) \exp\left(-\frac{k_l w}{uwh} x\right) \quad (20)$$

Imponendo $C(x=L) = 6 \text{ mg/l}$, si può ricavare il valore di L entro cui il livello di ossigeno risale a valori accettabili.

c.

1. Il bilancio di massa relativo al gas assorbito in fase liquida risulta:

$$\frac{dVC(z)}{dz} = \frac{\Gamma}{\rho} \pi d (C(z) - C(z + dz)) + \quad (21)$$

$$+ k A_{int} (C_{sat} - C(z)) \quad (22)$$

dove d è il diametro della colonna. Il primo termine a sinistra è nullo se la colonna funziona in condizioni di stazionario. Il flusso convettivo può essere riscritto come:

$$\frac{\Gamma}{\rho} \pi d (C(z) - C(z + dz)) = -\frac{\Gamma}{\rho} \pi d \frac{dC(z)}{dz} dz \quad (23)$$

e l'area di interfaccia è data da $A_{int} = \pi d dz$. Il bilancio si semplifica in:

$$\frac{dC(z)}{dz} = \frac{k\rho}{\Gamma} (C_{sat} - C(z)) \quad (24)$$

con k è il coefficiente di trasferimento di massa locale. L'integrazione dell'equazione permette di ricavare l'espressione della concentrazione del liquido a distanza L e, se questo è noto, il valore di k . Integrando tra 0 ed L si ha:

$$\frac{dC(z)}{C_{sat} - C(z)} = \frac{k\rho}{\Gamma} dz \quad (25)$$

$$\ln \frac{C_{sat} - C(z)}{C_{sat} - C(0)} = -\frac{k\rho}{\Gamma} z \quad (26)$$

$$\frac{C_{sat} - C(z)}{C_{sat} - C(0)} = \exp\left(-\frac{k\rho}{\Gamma} z\right) \quad (27)$$

Il profilo di concentrazione lungo la colonna risulta:

$$C_{sat} - C(z) = (C_{sat} - C(0)) \exp\left(-\frac{k\rho}{\Gamma} z\right) \quad (28)$$

$$C(z) = C_{sat} - (C_{sat} - C(0)) \exp\left(-\frac{k\rho}{\Gamma} z\right) \quad (29)$$

Assumiamo che la concentrazione C , espressa in moli/m^3 , sia nulla quando il liquido entra in colonna. A distanza L la concentrazione vale:

$$C(L) = C_{sat} \left(1 - \exp\left(-\frac{k\rho}{\Gamma} L\right)\right) = 0.4 C_{sat} \quad (30)$$

da cui si può ricavare il coefficiente di trasferimento di massa locale:

$$k = -\frac{\Gamma}{\rho L} \ln \frac{C_{sat} - C(L)}{C_{sat}} = -\frac{\Gamma}{\rho L} \ln 0.6 \quad (31)$$

Il flusso molare di CO_2 assorbita in fase liquida entro la generica distanza z è calcolabile come variazione di CO_2 in fase liquida tra sezione z e ingresso:

$$\dot{m}_{int}(z) = \frac{\Gamma \pi d}{\rho} (C(z) - C(0)) = C(z) \frac{\Gamma \pi d}{\rho} \quad (32)$$

In corrispondenza della sezione di uscita, $z = L$, questa portata trasferita può essere espressa utilizzando il coefficiente di trasferimento globale k_L come:

$$\dot{m}_{int}(L) = k_L A_{int,L} (C(L) - C(0)) \quad (33)$$

dove $A_{int,L} = \pi d L$. Per legare il coefficiente di trasferimento di massa locale a quello dell'apparecchiatura si può procedere uguagliando le due espressioni del flusso trasferito:

$$C(L) \frac{\Gamma}{\rho} \pi d = k_L \pi d L (C(L) - C(0)) \quad (34)$$

ed esprimendo Γ in funzione di k attraverso la 30:

$$\Gamma = -\frac{\rho k L}{\ln \frac{C_{sat} - C(L)}{C_{sat} - C(0)}} = \frac{\rho k L}{\ln \frac{C_{sat} - C(0)}{C_{sat} - C(L)}} \quad (35)$$

da cui si ricava:

$$\frac{k \pi d L}{\ln \frac{C_{sat} - C(0)}{C_{sat} - C(L)}} C(L) = k_L \pi d L (C(L) - C(0)) \quad (36)$$

$$\frac{k \pi d L}{\ln \frac{C_{sat} - C(0)}{C_{sat} - C(L)}} \cdot \quad (37)$$

$$\cdot [C(L) - C_{sat} - (C(0) - C_{sat})] = \quad (38)$$

$$= k A_{int,L} \frac{[C(L) - C_{sat} - (C(0) - C_{sat})]}{\ln \frac{C_{sat} - C(0)}{C_{sat} - C(L)}} = \quad (39)$$

$$= k A_{int,L} \Delta C_{ml} = k_L A_{int,L} (C(L) - C(0)) \quad (40)$$

$$(41)$$

Da qui si ricava:

$$k_L = k / \ln \frac{C_{sat} - C(0)}{C_{sat} - C(L)} = \frac{\Gamma}{\rho L} \quad (42)$$

Il coefficiente di trasferimento di massa dell'apparecchiatura dipende quindi dalla portata del film e dalla lunghezza della colonna.

d.

1. In questa configurazione, le gocce di liquido entrano dalla sommità dello scrubber a concentrazione di VOC $C(0) = 0$. Mentre si muovono verso il basso per gravità, si arricchiscono in concentrazione di VOC per effetto del trasferimento di massa attraverso l'interfaccia $A_{int} = \pi D_p^2/4$, con D_p diametro della goccia. $J(z)$ è il flusso trasferito per unità di superficie della goccia. Il bilancio di massa di VOC scritto per il volume di controllo associato ad una singola goccia che si muove lungo la colonna è dato da:

$$\frac{dVC(t)}{dt} = A_{int} J(z) \quad (43)$$

In questo caso, il trasferimento di massa non avviene in condizioni stazionarie per la singola goccia ($VdC/dt \neq 0$), mentre rimane stazionario a livello di apparecchiatura. Se il gas fosse fermo, la goccia si muoverebbe verso il basso alla sua velocità terminale

$$v_p = \tau_p g = \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu} g \quad (44)$$

Questa velocità deve essere confrontata con quella del gas che sale in colonna ($v_{gas} = Q/A$, con A sezione della colonna). La velocità netta delle gocce verso il basso è data da $v'_p = v_p - v_{gas}$. In queste condizioni, la coordinata temporale (tempo dall'ingresso della goccia in colonna) e quella spaziale (spazio percorso lungo la colonna) sono tra loro legati come:

$$z = v'_p t \rightarrow t = z/v'_p$$

per cui l'equazione di bilancio può essere riscritta come:

$$\frac{VdC(t)}{dt} = \frac{Vv'_p dC(z)}{dz} = A_{int} J(z) \quad (45)$$

$$\frac{dC(z)}{dz} = \frac{A_{int}}{Vv'_p} J(z) = \quad (46)$$

$$\frac{dC(z)}{dz} = \frac{\pi D_p^2 6}{\pi D_p^3 v'_p} D \frac{C_{sat} - C(z)}{D_p/2} \quad (47)$$

$$\frac{dC(z)}{dz} = \frac{12D}{D_p^2 v'_p} (C_{sat} - C(z)) \quad (48)$$

2. L'equazione in questa forma può essere integrata nella coordinata z .

$$\frac{dC(z)}{C_{sat} - C(z)} = \frac{12D}{D_p^2 v'_p} dz \quad (49)$$

$$\ln \frac{C_{sat} - C(z)}{C_{sat} - C(0)} = -\frac{12D}{D_p^2 v'_p} z \quad (50)$$

$$\frac{C_{sat} - C(z)}{C_{sat} - C(0)} = \exp\left(-\frac{12D}{D_p^2 v'_p} z\right) \quad (51)$$

Risulta:

$$C_{sat} - C(z) = (C_{sat} - C(0)) \exp\left(\frac{-12D}{D_p^2 v'_p} z\right) \quad (52)$$

da cui è possibile ricavare la relazione tra concentrazione di VOC nella goccia alla base della colonna e la dimensione della goccia. Infatti esprimendo la velocità terminale v'_p in funzione di D_p è possibile ricavare D_p che permette di realizzare il trasferimento di massa nella lunghezza disponibile.

e.

1. Il bilancio di massa su una fetta di altezza dz di liquido all'interno dell'ossigenatore a bolle fornisce:

$$0 = QC(z) - QC(z + dz) + KA_{int}(C_{sat} - C(z)) \quad (53)$$

che in forma differenziale diventa

$$Q \frac{dC}{dz} dz = KA_{int}(C_{sat} - C(z)) \quad (54)$$

Come per una colonna a riempimento, l'aria di interfaccia si può calcolare come:

$$A_{int} = adV = a \cdot Sdz \quad (55)$$

dove a è l'area di interfaccia per unità di volume e S è la sezione della colonna. a dipende dalla quantità di gas presente nell'unità di volume e dalla dimensione delle bolle di gas. Riarrangiando l'equazione di bilancio si ottiene:

$$\frac{dC}{dz} = \frac{Ka}{v}(C_{sat} - C(z)) \quad (56)$$

dove $v = Q/S$ è la velocità superficiale del fluido in colonna. Questa equazione può essere integrata per separazione di variabili tenendo conto della condizione al contorno $C(0) = 0$ alla base dell'ossigenatore e fornisce:

$$C(z) = C_{sat} \left(1 - \exp\left[-\frac{Kaz}{v}\right]\right) \quad (57)$$

dove z è la posizione lungo la colonna.

2. Il grado di ossigenazione realizzato è :

$$C(L) = C_{sat} \left(1 - \exp\left[-\frac{KaL}{v}\right]\right) = 0.08C_{sat} \quad (58)$$

3. A parità di massa di ossigeno iniettata, per massimizzare il trasferimento alla fase liquida dovrei utilizzare la massima area di interfaccia possibile. È preferibile generare bolle di diametro molto piccolo che, a parità di volume di gas insufflato,

$$V_{O_2} = n_b \cdot \pi d_b^3 / 6 \quad (59)$$

permettono di massimizzare la superficie di interfaccia

$$A_{O_2} = n_b \cdot \pi d_b^2 \quad (60)$$

e il valore di interfaccia specifica (per unità di volume di gas insufflato):

$$a_{O_2} = \frac{n_b \cdot \pi d_b^2}{n_b \cdot \pi d_b^3 / 6} = 6/d_b \quad (61)$$

L'area specifica della bolla è tanto più grande quanto più piccole sono le bolle. Tuttavia, esiste un limite alla dimensione minima della bolla al di sotto della quale la colonna non potrà funzionare che è dato dall'impossibilità delle bolle di risalire contro la portata di liquido. Per calcolare la dimensione critica della bolla, bisogna calcolare la velocità di risalita:

$$v_{O_2} = \tau_p g = \frac{(\rho - \rho_g) d_b^2 g}{18\mu} \quad (62)$$

Il diametro critico è quello per cui $v_{O_2} < v$.

f.

1. La portata volumetrica di gas da trattare è $Q = \dot{m}/WL = 2 \text{ m}^3/\text{s}$. Indicata la concentrazione di H_2S nel gas come C , [kg/m^3], e fissata l'origine del sistema di riferimento in corrispondenza della sezione di ingresso del gas, il bilancio di massa sul gas scritto per un volume di controllo corrispondente ad una fetta di altezza dz del biofiltro risulta:

$$0 = QC(z) - QC(z + dz) - KA_{int}(C(z) - C_{liq}) \quad (63)$$

che in forma differenziale diventa

$$Q \frac{dC}{dz} dz = -KA_{int}(C(z) - C_{liq}) = -KA_{int}C(z) \quad (64)$$

Come per una colonna a riempimento, l'area di interfaccia nel volume di controllo del biofiltro si può calcolare come:

$$A_{int} = adV = a \cdot Sdz \quad (65)$$

dove a è l'area di interfaccia per unità di volume e S è la sezione della colonna. Riarrangiando l'equazione di bilancio si ottiene:

$$\frac{dC}{dz} = -\frac{Ka}{v}C(z) \quad (66)$$

dove $v = Q/S$ è la velocità superficiale del gas in colonna. Questa equazione può essere integrata per separazione di variabili tenendo conto della condizione al contorno $C(0) = C_{in}$ all'ingresso nel biofiltro e fornisce:

$$C(z) = C_{in} \exp\left(-\frac{Kaz}{v}\right) \quad (67)$$

2. L'efficienza del biofiltro è definita come

$$\eta = \frac{\dot{m}_{H_2S,in} - \dot{m}_{H_2S,out}}{\dot{m}_{H_2S,in}} = \quad (68)$$

$$\frac{C_{H_2S,in} - C_{H_2S,out}}{C_{H_2S,in}} = 1 - \frac{C_{H_2S,out}}{C_{H_2S,in}} \quad (69)$$

Se l'efficienza di abbattimento del biofiltro deve essere pari a $\eta = 0.9$, la concentrazione in fase gas all'uscita del biofiltro deve valere $C(z = H) = (1 - \eta)C_{in}$. Dall'equazione 67 si ha:

$$\ln \frac{C_{in}}{C(z)} = \frac{Kaz}{v} \quad (70)$$

da cui sostituendo i valori si ottiene $a = a_{min} = (v/KH) \ln(1./0.1) = 13815.5 \text{ m}^2/\text{m}^3$. Qualsiasi riempimento di area specifica $a > a_{min}$ permetterà di realizzare il trasferimento di massa con l'efficienza desiderata.

g.

1. La velocità del liquido di lavaggio nel tubo di sollevamento è $v = 4Q/\pi D_{pipe}^2 = 1.52 \text{ m/s}$, che corrisponde a flusso turbolento ($Re = \rho v D_{pipe}/\mu_L = 152788$). Utilizzando la formula di Blasius il coefficiente di attrito risulta:

$$f = 0.079 \cdot Re^{-0.25} = 0.004 \quad (71)$$

Applicando Bernoulli tra il serbatoio di alimentazione e la sommità della colonna abbiamo:

$$p_{atm} + \rho g H_{serb} + \Delta p_{pump} = \quad (72)$$

$$p_{atm} + \rho g H + 2f \frac{H}{D} \rho v^2 + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (73)$$

dove Δp_{pump} è la prevalenza, in [Pa], della pompa. Tenuto conto che il serbatoio è al livello del suolo ($H_{serb} = 0$) e che il contributo del termine cinetico è trascurabile rispetto alle perdite per attrito, si ottiene:

$$\Delta p_{pump} = \rho g H + 2f \frac{H}{D} \rho v^2 = \quad (74)$$

$$1.962 \cdot 10^5 + 3696.64 = 1.9989 \cdot 10^5 Pa \quad (75)$$

Il primo termine (energia per unità di volume necessaria per il sollevamento del fluido) è molto maggiore del termine di perdita di carico. La potenza della pompa che consente di realizzare il sollevamento è $P = \Delta p_{pump} \cdot Q = 2.398 \text{ kW}$.

2. Per permettere la sedimentazione delle particelle di calcare lungo il tratto verticale di tubo, la velocità di deposizione delle particelle deve risultare superiore a quella di trascinamento del fluido, in modo da avere moto netto verso il basso per la fase solida sospesa. Per calcolare la velocità di sedimentazione si considera il bilancio delle forze agenti sulla particella a stazionario, che sono la forza peso, la spinta di Archimede (galleggiamento) e la forza di attrito. Preso un sistema di riferimento diretto verso l'alti ha:

$$\pi \frac{D_p^3}{6} g(\rho - \rho_p)v_p + \frac{1}{2} C_D \pi \frac{D_p^2}{4} \rho (v - v_p) \|v - v_p\| = 0 \quad (76)$$

con $C_D = f(Re_p)$, da cui

$$(v - v_p) = \sqrt{\frac{4(\rho_p - \rho)gD_p}{3C_D\rho}} \quad (77)$$

Se le particelle si muovono in regime di Stokes, $C_D = 24/Re_p$:

$$v - v_p = \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu} \frac{\rho_p - \rho}{\rho_p} g = 1.079 \text{ m/s} \quad (78)$$

Calcolando il numero di Reynolds della particella, $Re_p = \rho D_p v_p / \mu = 2158$ per cui la velocità va ricalcolata utilizzando l'espressione corretta per il coefficiente di attrito C_D fino a convergenza sul valore di velocità. In un paio di iterate si ottiene $v - v_p = 0.148$ m/s. Per avere sedimentazione deve essere $v_p = v - 0.148 < 0$ (velocità della particella diretta verso il basso), per cui bisogna che $v < 0.148$ m/s (portata ridotta di un fattore 10.27).

3. Il bilancio di massa scritto in condizioni stazionarie per una fetta di liquido di altezza dx con sistema di riferimento in corrispondenza della sezione di ingresso del liquido fornisce:

$$0 = QC(x) - QC(x + dx) + KA_{int}(C_{sat} - C(x)) \quad (79)$$

dove $A_{int} = \pi D_{col} dx$. Riarrangiando i termini si ha:

$$Q \frac{dC(x)}{dx} dx = KA_{int}(C_{sat} - C(x)) \quad (80)$$

La condizione al contorno è $C(x = 0) = 0$. Se K è costante, separando le variabili e integrando si ottiene:

$$\ln \frac{C_{sat} - C(x)}{C_{sat} - C(0)} = -\frac{K\pi D_{col} x}{Q} \quad (81)$$

da cui

$$C(x) = C_{sat} \left(1 - \exp \left(-\frac{K\pi D_{col} x}{Q} \right) \right) \quad (82)$$

4. Se K dipende dallo spessore e varia con la posizione x lungo la colonna bisogna separare le variabili opportunamente prima di integrare l'equazione differenziale:

$$\frac{dC(x)}{C_{sat} - C(x)} = \frac{\pi D_{col}}{Q} K(x) dx = Ax^{-0.5} dx \quad (83)$$

dove $A = \pi D_{col} / Q \cdot (6D\Gamma / \pi \rho \delta)^{0.5}$ è funzione di Q ($A \propto Q^{-1/3}$) ma costante in x . Integrando si ottiene:

$$\ln \frac{C_{sat} - C(x)}{C_{sat} - C(0)} = -2Ax^{0.5} \quad (84)$$

da cui

$$C(x) = C_{sat} \left(1 - \exp(-2Ax^{0.5}) \right) \quad (85)$$

Essendo $A \propto Q^{-1/3}$, una riduzione della portata (e dello spessore del film) produce una riduzione della lunghezza di colonna necessaria per realizzare un determinato assorbimento.

h.

1. Il bilancio di massa scritto in condizioni stazionarie per una fetta di liquido di altezza dx con sistema di riferimento in corrispondenza della sezione di ingresso del liquido fornisce:

$$0 = QC(x) - QC(x + dx) + kA_{int}(C_{sat} - C(x)) \quad (86)$$

dove $A_{int} = aSdx$ con S sezione della colonna. Riarrangiando i termini si ha:

$$Q \frac{dC(x)}{dx} dx = kaS(C_{sat} - C(x)) \quad (87)$$

La condizione al contorno è $C(x = 0) = 0$. La correlazione fornita per ricavare il valore di k indica che k è costante con x , ma dipende dalla scelta del riempimento:

$$k = 25 \frac{D}{d} \left(\frac{dv_o}{\nu} \right)^{0.45} \cdot \left(\frac{\nu}{D} \right)^{0.5} = A \cdot d^{-0.55} \quad (88)$$

Separando le variabili e integrando si ottiene:

$$\ln \frac{C_{sat} - C(x)}{C_{sat} - C(0)} = -\frac{kaSx}{Q} \quad (89)$$

da cui

$$C(x) = C_{sat} \left(1 - \exp \left(-\frac{kaSx}{Q} \right) \right) \quad (90)$$

2. Per identificare il tipo di riempimento più adatto da utilizzare bisogna valutare per quale valore di ka (termini che dipendono dal riempimento) bisogna avere per realizzare l'assorbimento desiderato. Dall'Equazione 101 ha:

$$\ln \frac{C_{sat} - C(H)}{C_{sat}} = \ln 0.25 = -\frac{kaSH}{Q} \quad (91)$$

da cui si ottiene

$$ka = -\frac{Q}{SH} \ln 0.25 = 0.00346 \quad (92)$$

che rappresenta il minimo valore del prodotto per il quale è possibile raggiungere il target di assorbimento nella colonna. Calcolando il valore di ka per i vari riempimenti, tutti quelli con valore maggiore del minimo sono riempimenti adatti.

Dai calcoli risulta:

per cui solo il terzo e quarto riempimento sono adeguati.

d	k	a	ak
$5.0 \cdot 10^{-2}$	$1.28 \cdot 10^{-5}$	$1.05 \cdot 10^2$	$1.35 \cdot 10^{-3}$
$3.8 \cdot 10^{-2}$	$1.49 \cdot 10^{-5}$	$1.50 \cdot 10^2$	$2.23 \cdot 10^{-3}$
$2.5 \cdot 10^{-2}$	$1.88 \cdot 10^{-5}$	$2.50 \cdot 10^2$	$4.69 \cdot 10^{-3}$
$1.3 \cdot 10^{-2}$	$2.69 \cdot 10^{-5}$	$4.65 \cdot 10^2$	$1.25 \cdot 10^{-2}$

i.

1. Per impostare il bilancio di massa consideriamo il volume di controllo associato ad una bolla di aria che risale nel serbatoio. Dalla conservazione della massa di NH_3 presente in fase gassosa, preso x verticale con $x = 0$ alla base del serbatoio, si ha:

$$\frac{dV_b C(x)}{dt} = kA_{int}(C_{int} - C(x)) \quad (93)$$

dove $V_b = \pi d_b^3/6$ è il volume della bolla e $A_{int} = \pi d_b^2$ è l'area disponibile per il trasferimento di massa. Con il passare del tempo, la bolla risale lungo la colonna. La relazione tra posizione della bolla e tempo trascorso dall'iniezione è data da $x = v_b \cdot t$ se la bolla risale a velocità costante (pari alla sua velocità terminale. La velocità di risalita dipende dalla dimensione della bolla e ipotizzando che la bolla si muova in regime di Stokes:

$$v_b = \tau_p g \frac{\rho - \rho_b}{\rho_b} = \frac{(\rho - \rho_b)gd_b^2}{18\mu} \quad (94)$$

Sostituendo lo spazio al tempo nell'equazione di bilancio si ottiene:

$$\frac{\pi d_b^3}{6} \frac{(\rho - \rho_b)gd_b^2}{18\mu} \frac{dC(x)}{dx} = k\pi d_b^2(C_{int} - C(x)) \quad (95)$$

Semplificando, separando le variabili e integrando lungo la colonna di liquido si ottiene:

$$\frac{dC(x)}{C_{int} - C(x)} = \frac{108\mu k}{g\Delta\rho d_b^3} dx \quad (96)$$

da cui

$$\ln \frac{C_{int} - C(x)}{C_{int} - C(0)} = -\frac{108\mu k}{g\Delta\rho d_b^3} x \quad (97)$$

da cui si ricava il profilo di concentrazione di NH_3 strappato lungo la colonna:

$$C(x) = C_{int} \left(1 - \exp\left(-\frac{108\mu k}{g\Delta\rho d_b^3} x\right)\right) \quad (98)$$

2. Per il valore di k assegnato, l'equazione 98 indica che, più è piccola la bolla più è grande la concentrazione di ammoniaca strappata.
3. Per il valore di k assegnato e il diametro di bolla pari a $d_b = 1 \text{ mm}$, la concentrazione del gas in uscita risulta $C(H) = 0.880C_{int} = 3.56 \text{ mg/l}$.

j.

1. Il bilancio di massa scritto in condizioni stazionarie per la fase gas contenuta in una fetta di colonna di altezza dx (sistema di riferimento con origine in corrispondenza della sezione di ingresso del gas) fornisce:

$$0 = QC(x) - QC(x + dx) - kA_{int}(C(x) - C_{int}) \quad (99)$$

dove $A_{int} = aSdx$ con S sezione della colonna e a superficie specifica del riempimento. Riarrangiando i termini si ha:

$$Q \frac{dC(x)}{dx} dx = kaS(C_{int} - C(x)) \quad (100)$$

La condizione al contorno è $C(x = 0) = C_{in} = 10 \text{ } \mu\text{g/m}^3$ e si assume $C_{liq} = 0$ come suggerito dal testo. Separando le variabili e integrando si ottiene:

$$\ln \frac{C(x)}{C_{in}} = -\frac{kaSx}{Q} \quad (101)$$

da cui

$$C(x) = C_{in} \exp\left(-\frac{kaSx}{Q}\right) \quad (102)$$

2. Per calcolare la quantità di VOC rimosso basta valutare la variazione del VOC presente in fase gas tra ingresso e uscita della colonna di lavaggio. La portata attuale della corrente di gas va calcolata convertendo i Nm^3/s in m^3/s . La densità del gas a condizioni normali è :

$$\rho_{cn} = \frac{Mp}{RT} = 1,17 \text{ kg/m}^3 \quad (103)$$

mentre la densità del gas alla temperatura di funzionamento della colonna è :

$$\rho = \frac{Mp}{RT_c} = 1,08 \text{ kg/m}^3 \quad (104)$$

per cui la portata volumetrica in colonna è :

$$Q = \frac{\rho_{cn}Q_{cn}}{\rho} = 3.8 \text{ m}^3/s. \quad (105)$$

Dai dati del problema risulta $C(H) = 0.14C_{in} = 1.4 \text{ } \mu\text{g/m}^3$ per cui la quantità di VOC assorbita è $\dot{m} = Q(C_{in} - C(H)) = 32.61 \text{ } \mu\text{g/s}$.

3. Per valutare se la soluzione proposta dal consulente è adeguata, si può ricalcolare il valore di concentrazione all'uscita se $a = a'$. Risulta $C(H) = 0.0196C_{in} = 0.196 \text{ } \mu\text{g/m}^3$ che è inferiore al valore del limite prescritto, per cui la soluzione è adeguata.

k.

1. Nel test di cessione il materiale solido presente in forma impaccata viene lambito da un liquido solvente in grado di estrarre dal solido le specie di interesse, accumulandole in fase liquida. Per limitare l'ingombro dell'apparecchiatura, il liquido viene ricircolato, cioè ad ogni passaggio il solvente che lambisce il solido è sempre più concentrato in soluto. Se la quantità di soluto estratta dalla fase solida non modifica sostanzialmente le caratteristiche del solido (C_{int} costante), la configurazione di colonna con ricircolo di solvente è equivalente alla configurazione di una colonna senza ricircolo ma molto più lunga, dove la lunghezza dipende dalla velocità del flusso e dal numero di volte che viene ricircolato nel tempo di test.

Il bilancio di massa scritto in condizioni stazionarie per la fase liquida contenuta in una fetta di colonna di altezza dx (sistema di riferimento con origine in corrispondenza della sezione di ingresso del liquido) fornisce:

$$0 = QC(x) - QC(x + dx) + kA_{int}(C_{int} - C(x)) \quad (106)$$

dove $A_{int} = aSdx$ con S sezione della colonna e a superficie specifica del riempimento. Riarrangiando i termini si ha:

$$Q \frac{dC(x)}{dx} dx = kaS(C_{int} - C(x)) \quad (107)$$

La condizione al contorno è $C(x = 0) = 0$ e si assume C_{int} costante come suggerito dal testo. La lunghezza della colonna equivalente (trattamento senza ricircolo), dipende dalla velocità superficiale del liquido, $v_{liq} = Q_{lavaggio}/A = 0.0127 \text{ m/s}$ con $A = \pi D^2/4$, e dal tempo di durata del test:

$$L_{eq} = v_{liq} t_{test} = 1100 \text{ m} \quad (108)$$

Separando le variabili e integrando si ottiene:

$$\ln \frac{C_{int} - C(x)}{C_{int}} = -\frac{kaSx}{Q} \quad (109)$$

da cui

$$C(x) = C_{int} \left(1 - \exp \left(-\frac{kaSx}{Q} \right) \right) \quad (110)$$

2. Per valutare il tasso di cessione, basta sostituire i valori numerici nell'equazione 111 da cui può essere esplicitato k :

$$k = \ln \frac{C_{int}}{C_{int} - C(H')} \frac{Q}{aS H'} \quad (111)$$

dove $C(H')$ è la concentrazione della specie nell'eluato a fine test. Dai calcoli risulta $k = 1.158 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}$.

l.

1. Per impostare il bilancio di massa consideriamo il volume di controllo associato ad una bolla di azoto che risale nel serbatoio. Dalla conservazione della massa di NH_3 presente in fase gassosa, preso x verticale con $x = 0$ alla base del serbatoio, si ha:

$$\frac{dV_b C(x)}{dt} = kA_{int}(C_{NH_3,int} - C(x)) \quad (112)$$

dove $V_b = \pi d_b^3/6$ è il volume della bolla e $A_{int} = \pi d_b^2$ è l'area disponibile per il trasferimento di massa. Con il passare del tempo, la bolla risale lungo la colonna. La relazione tra posizione della bolla e tempo trascorso dall'iniezione è data da $x = v_b \cdot t$ se la bolla risale a velocità costante (pari alla sua velocità terminale. La velocità di risalita dipende dalla dimensione della bolla e ipotizzando che la bolla si muova in regime di Stokes:

$$v_b = \tau_p g \frac{\rho - \rho_b}{\rho_b} = \frac{(\rho - \rho_b) g d_b^2}{18\mu} \quad (113)$$

Sostituendo lo spazio al tempo nell'equazione di bilancio si ottiene:

$$\frac{\pi d_b^3}{6} \frac{(\rho - \rho_b) g d_b^2}{18\mu} \frac{dC(x)}{dx} = k \pi d_b^2 (C_{NH_3,int} - C(x)) \quad (114)$$

Semplificando, separando le variabili e integrando lungo la colonna di stripping si ottiene:

$$\frac{dC(x)}{C_{NH_3,int} - C(x)} = \frac{108\mu k}{g \Delta \rho d_b^3} dx \quad (115)$$

da cui

$$\ln \frac{C_{NH_3,int} - C(x)}{C_{NH_3,int} - C(0)} = -\frac{108\mu k}{g \Delta \rho d_b^3} x \quad (116)$$

da cui si ricava il profilo di concentrazione di NH_3 strippato lungo la colonna:

$$C(x) = C_{NH_3,int} \left(1 - \exp \left(-\frac{108\mu k}{g \Delta \rho d_b^3} x \right) \right) \quad (117)$$

2. Per il valore di k assegnato e la concentrazione di NH_3 desiderata per le bolle in uscita, l'equazione 116 permette di ricavare la dimensione della bolla necessaria per realizzare il trasferimento: più è piccola la bolla più è grande la concentrazione di ammoniaca strippata. Sostituendo i valori numerici risulta $d_b = 84.4 \mu\text{m}$. Questo è il valore massimo del diametro delle bolle da insufflare per realizzare l'abbattimento.