Soluzioni Homework N^o 2: trasporto/stoccaggio di fluidi comprimibili

a.

1. Essendo note le caratteristiche della linea e la trasformazione che il gas subisce, posso verificare se la pressione del serbatoio B è tale da instaurare condizioni critiche per il trasporto di gas. Utilizzando l'equazione di Bernoulli ricavata per trasporto in tubazione isoterma in condizioni critiche e indicati con 1 la pressione in corrispondenza della sezione di imbocco della condotta ($p_1 \simeq p_B$) e 2 la pressione alla sezione di sbocco nel serbatoio A, si ha:

$$\ln\frac{p_1}{p_2}+\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2\right)+2f\frac{L}{D}=0 \tag{1}$$

da cui si può ricavare il rapporto critico:

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{II}=\sqrt{1+4f\frac{L}{D}+\left(2\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{I}\right)} \tag{2}$$

da cui, trascurando inizialmente il termine logaritmico, si ricava $p_1/p_2 = 3.605$ e iterando si converge a $(p_1/p_2)_{cr} = 3.969$. Poiché è $p_B/p_A = 25 \gg (p_1/p_2)_{cr}$, il flusso da B è sonico. In alternativa posso valutare la minima pressione nel serbatoio B in grado di generare flusso sonico lungo la linea è $p_{B,min,cr} = (p_1/p_2)_{cr}p_{atm} = 3.969\ atm$. Essendo il valore iniziale di pressione nel serbatoio B superiore a $p_{B,min,cr}$, il flusso è sonico. In condizioni di flusso sonico

- la portata trasmessa è funzione delle condizioni che si instaurano nella sezione di sbocco:

$$G=\sqrt{p_2\rho_2}=\sqrt{\frac{M}{RT}}p_2 \tag{3}$$

- il rapporto delle pressioni tra monte e valle della tubazione è costante e pari al rapporto critico, per cui

$$p_2=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{cr}^{-1}p_1=6.299\cdot 10^5 Pa \tag{4}$$

Risulta quindi $G(t=0) = 2135.56\ kg/m^2s$. La portata di gas trasferita è data da $\dot{m} = GA = 4.19\ kg/s$.

2. La massa trasferita da B ad A per caricare il serbatoio A da 1 atm a 15 atm può essere calcolata come:

$$\Delta m = m_{fin}-m_{in} = M(n_{fin}-n_{in}) = \frac{MV}{RT}(p_{A,fin}-p_{A,in}) \tag{5}$$

dove si è utilizzata la legge dei gas ideali per esprimere il numero di moli n in funzione della pressione. Dal calcolo risulta $m = 80.46\ kg$. Risulterebbe molto più complesso valutare la massa trasferita da Ba d A come l'integrale nel tempo del flusso G che si muove lungo la tubazione. La legge che lega $G = f(p_1)$ è infatti semplice finché si mantengono condizioni di flusso critico ma si complica quando, per effetto dell'acccumulo di massa nel serbatoio A, la pressione di A diventa tale da portare a condizioni di flusso non critico. Queste condizioni si verificano quando $p_A = 6.299 \cdot 10^5 Pa$, per cui una significativa fase del riempimento del serbatoio (da 6.299 a 15 atm) avviene in regime sub-sonico. In queste condizioni, dovrei integrare nel tempo l'espressione del flusso specifico dato da:

$$G=\sqrt{\frac{\frac{M}{2RT}\left(p_1^2-p_2^2\right)}{\ln\frac{p_1}{p_2}+2\frac{fL}{D}}} \tag{6}$$

dove $p_1 = p_B = 25\ atm$ e $p_2 = f(t)$ attraverso l'equazione di conservazione della massa.

3. Ipotizzando che anche la trasformazione di efflusso dal serbatoio A sia isoterma, per verificare se siamo in condizioni soniche bisogna confrontare la pressione nel serbatoio con quella in grado di produrre flusso sonico. Indicata con p_A la pressione nel serbatoio e con p_3 la pressione in corrispondenza della sezione di rottura, l'equazione di Bernoulli scritta per efflusso da serbatoio (linea di lunghezza trascurabile) per trasformazione isoterma e condizioni critiche fornisce:

$$\left(\frac{p_A}{p_3}\right)_{cr}=e^{1/2}=1.649 \tag{7}$$

In alternativa posso valutare la minima pressione del serbatoio A per cui il flusso rimane critico, $p_{A,min,cr} = (p_A/p_3)_{cr}p_{atm} = 1.649 \cdot 10^5 Pa$. Essendo $p_A = 20 \cdot 10^5 Pa$, il flusso risulterà critico all'istante iniziale e finché la condizione $p_A > p_{A,min,cr}$ è soddisfatta.

4. Se viene interrotta l'alimentazione di gas dal serbatoio B, il bilancio di massa sul serbatoio A fornisce:

$$\frac{MV}{RT}\frac{dp_A}{dt}=-A_rG \tag{8}$$

dove A_r è la sezione della rottura e G è il flusso specifico, che in condizioni di flusso critico risulta:

$$G=\sqrt{p_3\rho_3}=\sqrt{\frac{M}{RT}}p_3=\sqrt{\frac{M}{RT}}\left(\frac{p_A}{p_3}\right)_{cr}^{-1}p_A=kp_A \tag{9}$$

con $k = 0.0021$ da cui

$$\frac{\mathrm{d}p_A}{dt} = -\frac{RT}{MV}kp_A = -K_T p_A \quad (10)$$

con $K_T = 0.0176\ s^{-1}$. Separando le variabili e integrando tra il valore di pressione del serbatoio A iniziale e finale (t^*) di durata dell'efflusso sonico si ottiene:

$$t^* = \frac{1}{K_T}\ln\frac{p_A(0)}{p_A(t^*)} = 142\ s \quad (11)$$

dove $p_A(t^*) = p_{A,min,cr}$.

b.

---

1. Essendo note le caratteristiche del condotto di collegamento tra serbatoio e bruciatore e la trasformazione che il gas subisce, posso verificare se la pressione del serbatoio è tale da instaurare condizioni critiche per il trasporto di gas. Utilizzando l'equazione di Bernoulli ricavata per trasporto in tubazione isoterma in condizioni critiche e indicati con 1 la pressione in corrispondenza della sezione di imbocco della condotta ($p_1 \simeq p_{serb}$) e 2 la pressione alla sezione di sbocco nel bruciatore, si ha:

$$\ln\frac{p_1}{p_2} + \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2\right) + 2f\frac{L}{D} = 0 \quad (12)$$

da cui si può ricavare il rapporto critico:

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{II} = \sqrt{1 + 4f\frac{L}{D} + \left(2\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^I\right)} \quad (13)$$

da cui, trascurando inizialmente il termine logaritmico, si ricava $p_1/p_2 = 9.539$ e iterando si converge a $(p_1/p_2)_{cr} = 9.775$. Poiché è $p_{serb}/p_{atm} = 30 \gg (p_1/p_2)_{cr}$, il flusso dal serbatoio è sonico. In alternativa, posso calcolare la minima pressione nel serbatoio in grado di generare flusso sonico lungo la linea di collegamento che è $p_{1,min,cr} = (p_1/p_2)_{cr}p_{atm} = 9.775\ atm$. Essendo il valore iniziale di pressione nel serbatoio (30 atm) superiore a $p_{1,min,cr}$, il flusso è sonico. In condizioni di flusso sonico

   - la portata trasmessa è funzione delle condizioni che si instaurano nella sezione di sbocco:

   $$G = \sqrt{p_2\rho_2} = \sqrt{\frac{M}{RT}}p_2 \quad (14)$$

   - il rapporto delle pressioni tra monte e valle della tubazione è costante e pari al rapporto critico, per cui

   $$p_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-1}_{cr} p_1 = 3.069 \cdot 10^5 Pa \quad (15)$$

   Risulta quindi $G(t = 0) = 1259.38\ kg/m^2s$. La portata di gas trasferita è data da $\dot{m} = GA = 39.56\ kg/s$.

2. Anche quando la pressione nel serbatoio si dimezza, la pressione è sufficiente per generare flusso critico. L'equazione di conservazione della massa per il gas contenuto nel serbatoio fornisce:

$$\frac{MV}{RT}\frac{\mathrm{d}p_1}{dt} = -AG \quad (16)$$

dove A è la sezione della condotta e G è il flusso specifico, che in condizioni di flusso critico risulta:

$$G = \sqrt{p_2\rho_2} = \sqrt{\frac{M}{RT}}p_2 = \sqrt{\frac{M}{RT}}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-1}_{cr} p_1 = kp_1 \quad (17)$$

da cui

$$\frac{\mathrm{d}p_1}{dt} = -\frac{RT}{MV}kp_1 = -K_T p_1 \quad (18)$$

con $K_T = 0.01958\ s^{-1}$. Separando le variabili e integrando tra i valori iniziale (30 atm) e finale (15 atm) di pressione del serbatoio si ottiene:

$$t = \frac{1}{K_T}\ln\frac{p_1(0)}{0.5p_1(0)} = \frac{1}{K_T}\ln 2 = 35.4\ s \quad (19)$$

3. La quantità di gas uscita fino a quel momento può essere calcolata come:

$$\Delta m = m_{in} - m_{fin} = M(n_{in} - n_{fin}) = \frac{MV}{RT}(p_{1,in} - p_{1,fin}) \quad (20)$$

dove si è utilizzata la legge dei gas ideali per esprimere il numero di moli n in funzione della pressione. Dal calcolo risulta $m = 1010.34\ kg$.

c.

---

1. Indicata con 0 la pressione nel serbatoio e con 1 la pressione alla sezione di sbocco della valvola di sfiato V_1, per efflusso isotermo critico da serbatoio il rapporto critico delle pressioni vale $p_0/p_1 = e^{1/2} = 1.649$. La minima pressione nel serbatoio per cui l'efflusso risulta critico è pari a $p_{0,min,cr} = (p_0/p_1)_{cr}p_{atm} = 1.649\ atm$ ed essendo la pressione iniziale nel serbatoio maggiore di questo valore il deflusso attraverso la valvola sarà critico.

2. L'equazione di conservazione della massa scritta per il gas contenuto all'interno del serbatoio è :

$$\frac{MV}{RT}\frac{\mathrm{d}p_0}{dt} = -A_v G \quad (21)$$

dove A_v è la sezione della valvola di sfiato. Ipotizzando che il flusso si mantenga critico per 40 s, G risulta:

$$G = \sqrt{p_1\rho_1} = \sqrt{\frac{M}{RT_1}}p_1 = \sqrt{\frac{M}{RT_0}}\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{-1}_{cr} p_0 = kp_0 \quad (22)$$

con $k = 0.00423$; sostituendo nel bilancio di massa si ha

$$\frac{\mathrm{d}p_0}{dt} = -A_v \frac{RT_0}{MV} k p_0 = -K_T p_0 \tag{23}$$

dove

$$K_T = \frac{A_v}{V}\sqrt{\frac{RT_0}{M}}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)_{CR}^{-1} \tag{24}$$

con $K_T = 0.020\ s^{-1}$. Separando le variabili e integrando si può calcolare il valore della pressione dopo 40 s:

$$p_1(t = 40\ s) = p_1(0)\exp(-K_T t) = 4.45 \cdot 10^5 Pa \tag{25}$$

Questa pressione è maggiore della pressione minima critica $p_{1,min,cr}$ per cui l'ipotesi che il flusso rimanesse critico durante i primi 40 s è corretta. La massa di gas uscita dal serbatoio nei primi 40 s risulta:

$$\Delta m = m_{in} - m_{fin} = M(n_{in} - n_{fin}) = \frac{MV}{RT}(p_{0,in} - p_{0,fin}) \tag{26}$$

dove si è utilizzata la legge dei gas ideali per esprimere il numero di moli n in funzione della pressione. Dal calcolo risulta $m = 36.45\ kg$.

3. Quando viene aperta la valvola V_2 la pressione nel serbatoio è inizialmente pari a $4.45 \cdot 10^5 Pa$. Questa pressione potrebbe risultare abbastanza elevata per generare flusso sonico lungo la condotta. Indicata con p_3 la pressione alla sezione di sbocco della condotta e con p_2 la sezione all'imbocco, coincidente con la pressione nel serbatoio A ($p_0 - p_2 << p_2 - p_3$), il valore del rapporto critico delle pressioni (Bernoulli isotermo critico per flusso in tubazione) è dato dalla:

$$\ln\frac{p_2}{p_3} + \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^2\right) + 2f\frac{L}{D} = 0 \tag{27}$$

da cui si può ricavare il rapporto critico:

$$\left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{II} = \sqrt{1 + 4f\frac{L}{D} + \left(2\ln\left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{I}\right)} \tag{28}$$

Trascurando inizialmente il termine logaritmico, si ricava $p_2/p_3 = 11$ e iterando si converge a $(p_2/p_3)_{cr} = 11.217$. Poiché è $p_0/p_{atm} = 4.45 \ll (p_2/p_3)_{cr}$ (o, in modo equivalente, $p_{atm}/p_0 = 1/4.45 \gg (p_3/p_2)_{cr} = 1/11.217$, il flusso lungo la linea non è sonico e la pressione nella sezione di sbocco, p_3, sarà uguale alla pressione atmosferica. Utilizzando Bernoulli isotermo (non critico) lungo la tubazione si ricava l'espressione per il flusso specifico:

$$G = \sqrt{\frac{(p_2^1 - p_{atm}^2)M/(2RT)}{\ln(p_2/p_{atm}) + 2fL/D}} = 100.20\ kg/m^2 s \tag{29}$$

La portata massica scaricata lungo la tubazione risulta $\dot{m} = GA = 0.049\ kg/s$.

d.

---

1. L'equazione di conservazione della massa scritta per il gas contenuto all'interno del serbatoio è : nel serbatoio fornisce:

$$\frac{MV}{RT}\frac{\mathrm{d}p_1}{dt} = w_{in} - w_{out} = w_{in} - GA \tag{30}$$

dove w_{in} e w_{out} sono rispettivamente la portata entrante e uscente dal serbatoio. A stazionario deve essere $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = 0$ per cui la portata scaricata deve eguagliare quella alimentata. Il flusso specifico scaricato è quindi $G = w_{in}/A$ dove A è la sezione della condotta e risulta $G = 318.30\ kg/m^2 s$. Per determinare la pressione nel serbatoio dobbiamo capire se il flusso è sonico o no. Possiamo determinare il valore minimo del flusso scaricato in condizioni soniche come:

$$G_{min,cr} = \sqrt{p_{atm}\rho_{atm}} = \sqrt{\frac{M}{RT}}p_{atm} = 256.28\ kg/m^2 s \tag{31}$$

La pressione e la densità nella sezione di sbocco diventano infatti al limite uguali ai valori dell'ambiente esterno quando il flusso passa da critico a sub-critico. Poiché è $G > G_{min,cr}$ il flusso è sonico. La pressione che deve esserci nella sezione di sbocco per scaricare il flusso specifico G è :

$$G_{cr} = \sqrt{p_2\rho_2} = \sqrt{\frac{M}{RT}}p_2 \rightarrow p_2 = G\sqrt{\frac{RT}{M}} = 1.242 \cdot 10^5 Pa \tag{32}$$

Ma quando il flusso è critico il rapporto tra la pressione nella sezione di monte e di valle della tubazione è costante e pari al rapporto critico, che dipende dalle caratteristiche della tubazione e da f. Per calcolare f si può usare la legge di Blasius, $f = 0.079 Re^{-0.25}$ con $Re = GD/\mu$. Risulta $f = 0.002166$. Per la tubazione in esame si ha (Bernoulli isotermo critico lungo una tubazione):

$$\ln\frac{p_1}{p_2} + \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2\right) + 2f\frac{L}{D} = 0 \tag{33}$$

da cui si può ricavare il rapporto critico:

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{II} = \sqrt{1 + 4f\frac{L}{D} + \left(2\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{I}\right)} \tag{34}$$

e, trascurando inizialmente il termine logaritmico, si ricava $p_1/p_2 = 8.386$ e iterando si converge a $(p_1/p_2)_{cr} = 8.639$. Si può quindi calcolare $p_1 = (p_1/p_2)_{cr} p_2 = 10.73 \cdot 10^5 Pa$.

2. Durante le operazioni di manutenzione, il bilancio di massa per il serbatoio diventa:

$$\frac{MV}{RT}\frac{\mathrm{d}p_1}{dt} = w_{in} \tag{35}$$

con $w_{in} = cost$. La legge di variazione della pressione è lineare:

$$p_1(t) = p_1(0) + \frac{w_{in}RT}{MV}t \tag{36}$$

e si può ricavare il tempo per cui risulta $p_1(t) = 10\ atm$:

$$t = \frac{p_1(t) - p_1(0)}{w_{in}RT/MV} = 24.356\ s \tag{37}$$

3. All'apertura della valvola, il serbatoio che si trova a $p_1 = 20\ atm$ scarica in atmosfera. Assumendo che l'efflusso da serbatoio sia adiabatico, il rapporto critico tra le pressioni (Bernoulli per efflusso da serbatoio, trasformazione adiabatica e in condizioni critiche, $\gamma = 1.3$) risulta:

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{cr} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.83 \tag{38}$$

La pressione minima critica per cui si ha efflusso sonico dal serbatoio è quindi $p_{1,min,cr} = p_1/p_2)_{cr}p_{atm} = 1.83 \cdot 10^5\ Pa$. Essendo $p_1 > p_{1,min,cr}$ il flusso è sonico e la portata specifica si calcola come:

$$G = \sqrt{\gamma p_2 \rho_2} = \sqrt{\gamma \frac{M}{RT_2}} p_2 = \tag{39}$$

$$= \sqrt{\gamma \frac{M}{RT_2}} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{cr}^{-1} p_1 \tag{40}$$

Si può ricavare T_2 da T_1 utilizzando la relazione tra $T^\gamma/p^{\gamma-1}$ da cui si ricava:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)_{cr} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{cr}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{\gamma+1}{2} = 1.15 \tag{41}$$

che permette di ottenere $T_2 = 254.8\ K$. Sostituendo T_2 nella 40 si ottiene $G = 3481.74\ kg/m^2s$.

e.

---

1. Schematizziamo il generico tratto di metanodotto come un segmento di tubazione preceduto da un compressore. Indichiamo con 1 la pressione in ingresso al compressore, con 2 la pressione all'uscita del compressore e con 3 la pressione a fine linea, che per periodicità deve essere uguale alla pressione nel punto 1. Il punto a pressione minore è il punto 1 (3), perché si trova a fine linea. Dovremo quindi verificare che $p_1 = p_3 \geq 1.5 \cdot 10^5\ Pa$. La portata in massa trasferita lungo la linea è data da:

$$\dot{m} = Q\rho \tag{42}$$

dove ρ è la densità del gas nelle condizioni in cui è stata misurata la portata volumetrica. Dalla legge dei gas ideali $\rho = p_{ref}M/RT_{ref} = 0.66\ kg/m^3$ da cui $\dot{m} = 23.\ kg/s$ e, essendo nota la sezione della condotta, $G = \dot{m}/A = 325.38\ kg/m^2s$. Il punto della condotta in cui la pressione è minima è quello subito a monte del compressore. Impongo quindi $p_3 = p_{min} = 1.5 \cdot 10^5 Pa$, e utilizzo Bernoulli isotermo non critico per ricavare p_2:

$$p_2 = \sqrt{p_3^2 + \frac{2fLG^2}{D}\frac{2RT}{M}} = 16.14 \cdot 10^5 Pa \tag{43}$$

La pressione di mandata del compressore sarà quindi $p_2 = 16.14 \cdot 10^5 Pa$.

2. Per calcolare la potenza del compressore devo valutare la prevalenza. Ipotizzo che la compressione sia una trasformazione adiabatica reversibile. Identificato con 1 il punto in corrispondenza della sezione di aspirazione del compressore e 1' il punto di mandata del compressore, vale $p/\rho^\gamma = C$ tra le sezioni 1 e 1'. Per il gas naturale (metano) $\gamma = 4/3 = 1.33$. Bernoulli differenziale

$$\frac{\mathrm{d}v^2}{2} + g\mathrm{d}h + \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = \mathrm{d}w_s - \frac{\mathrm{d}l_v}{\rho} \tag{44}$$

semplificato per il caso in esame (perdite trascurabili, termine gravitazionela trascurabile), integrato tra la sezione di aspirazione e mandata del compressore fornisce:

$$\frac{v_{1'}^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + \int_1^{1'} \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = w_s \tag{45}$$

L'integrale di pressione diventa:

$$\int_1^{1'} \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = \tag{46}$$

$$= \int_1^{1'} \frac{C^{1/\gamma}\mathrm{d}p}{p^{1/\gamma}} = C^{1/\gamma}\frac{1}{-1/\gamma+1}\left[p^{-1/\gamma+1}\right]_1^{1'} = \tag{47}$$

$$= C^{1/\gamma}\frac{\gamma}{\gamma-1}\left[p_{1'}^{(\gamma-1)/\gamma} - p_1^{(\gamma-1)/\gamma}\right] \tag{48}$$

Introducendo il valore di $C^{1/\gamma} = p_1^{1/\gamma}/rho_1 = p_{1'}^{1/\gamma}/rho_{1'}$, l'espressione si semplifica in

$$\int_1^{1'} \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\left[\frac{p_{1'}}{\rho_{1'}} - \frac{p_1}{\rho_1}\right] = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{R}{M}\left[T_{1'} - T_1\right] \tag{49}$$

La temperatura alla sezione di mandata del compressore sarà maggiore della temperatura di ingresso e per la trasformazione adiabatica reversibile è :

$$C = \frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p^\gamma p^{(1-\gamma)}}{\rho^\gamma} = \left(\frac{p}{\rho}\right)^\gamma p^{1-\gamma} \quad (50)$$

$$\rightarrow T \cdot p^{(1-\gamma)/\gamma} = C_1 \quad (51)$$

da cui

$$T_{1'} = T_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p_{1'}}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} = T_1 \cdot \left(\frac{p_{1'}}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \quad (52)$$

$$= 293 \cdot \left(\frac{16.4}{1.5}\right)^{0.33/1.33} = 293 \cdot 1.81 = 530\ K \quad (53)$$

Il termine di pressione risulta quindi pari a $497173.30\ m^2/s^2$. I termini cinetici possono essere valutati essendo noti G, le pressioni e le temperature in 1 e 1'. Si ha:

$$\rho_1 = \frac{p_1 M}{RT_1} = 0.98\ kg/m^3 \rightarrow v_1 = \frac{G}{\rho_1} = 333.30\ m/s \quad (54)$$

$$\rho_{1'} = \frac{p_{1'} M}{RT_{1'}} = 5.86\ kg/m^3 \rightarrow v_{1'} = \frac{G}{\rho_{1'}} = 55.52\ m/s \quad (55)$$

e il contributo alla prevalenza del termine cinetico risulta pari a $-54003.18\ m^2/s^2$ (circa il 10% del valore dovuto al termine di pressione). Sommando i termini si ricava $w_s = 443170.12\ m^2/s^2$ e la potenza $P = w_s \cdot \dot{m} = 10.19\ MW$.

3. La rottura della condotta a monte dell'ingresso nel compressore mette in comunicazione l'ambiente interno al tubo, a pressione pari a $1.5 \cdot 10^5\ Pa$, con l'ambiente esterno, a pressione atmosferica. Ipotizzando che la trasformazione del gas sia adiabatica (efflusso adiabatico di gas da serbatoio) possiamo calcolare il rapporto critico delle pressioni (tra pressione nel tubo in corrispondenza della sezione di rottura, p_3, e pressione nella sezione di rottura, p_r), dato da:

$$\left(\frac{p_3}{p_r}\right)_{cr} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.89 \quad (56)$$

La pressione minima critica per avere efflusso sonico dalla sezione di rottura è $p_{3,min,cr} = 1.89 \cdot 10^5 Pa$. La pressione nella posizione della rottura è inferiore, per cui il flusso dalla rottura non sarà sonico. Il flusso specifico uscente è dato da

$$G = \rho_1 v_1 = \rho_1 \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[\frac{p_3}{\rho_3} - \frac{p_{env}}{\rho_{env}}\right]} \quad (57)$$

dove $\rho_3 = p_3 M/RT$, $p_{env} = 1\ atm$ e $\rho_{env} = p_{env} M/RT_r$ con T_r temperatura del gas che si espande secondo l'adiabatica reversibile da p_3, T a p_{env}, T_r, ovvero $p_{env}^{\gamma-1}/T_r^\gamma = p_3^{\gamma-1}/T^\gamma$. Essendo per il metano (gas poliatomico) $\gamma = 1.33$ risulta $T_r = T(p_3/p_{env})^{(1-\gamma)/\gamma} = 0.91 \cdot T = 266\ K$, $\rho_3 = 0.72\ kg/m^3$ da cui si ricava G.

f.

1. La conservazione della massa per il gas presente nel serbatoio è

$$\frac{MV}{RT}\frac{\mathrm{d}p_s}{dt} = M\dot{n}(t) = M\dot{n}_0 \exp[kt] \quad (58)$$

dove il termine a destra rappresenta la massa che si forma per effetto della reazione chimica. Questa equazione può essere integrata a partire dalla condizione iniziale $p_s(0) = 2\ atm$, per ricavare la legge di variazione della pressione nel serbatoio:

$$p_s(t) = p_s(0) + \frac{\dot{n}_0 RT}{Vk}\left(\exp(kt) - 1\right) \quad (59)$$

che aumenta esponenzialmente. Per calcolare il tempo che intercorre prima dell'apertura della valvola basta esplicitare t:

$$t = \frac{1}{k}\ln\left(1 + \frac{p_s(t) - p_s(0)}{\dot{n}_0 RT} Vk\right) \quad (60)$$

Per i dati del problema risulta $t = 18.26\ s$.

2. Quando si apre la valvola di sicurezza il bilancio di massa sul serbatoio diventa

$$\frac{MV}{RT}\frac{\mathrm{d}p_s}{dt} = M\dot{n}(t) = M\dot{n}_0 \exp[kt] - AG \quad (61)$$

dove G è il flusso che esce dalla valvola di sicurezza. Per efflusso adiabatico da serbatoio, il rapporto critico delle pressioni tra pressione nel serbatoio, p_s, e pressione nella sezione di sbocco, p_o, è

$$\left(\frac{p_s}{p_o}\right)_{cr} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.89 \quad (62)$$

La pressione minima critica per avere efflusso sonico dalla sezione di rottura è $p_{s,min,cr} = 1.89 \cdot 10^5 Pa$. La pressione nel serbatoio nell'istante di apertura della valvola è $15\ atm > p_{s,min,cr}$ per cui il flusso è sonico. Il flusso specifico uscente è in ogni istante dato da

$$G = \sqrt{\gamma p_o \rho_o} = \sqrt{\gamma \frac{M}{RT_o}} p_o \quad (63)$$

dove $p_o^{\gamma-1}T_o^\gamma = p_s^{\gamma-1}T_s^\gamma$ per la trasformazione adiabatica e $(T_s/T_o) = (p_s/p_o)_{cr}^{(\gamma-1)/\gamma} = (\gamma+1)/2 = 1.2$ utilizzando il rapporto critico tra le pressioni. All'istante di apertura ddella valvola risulta $p_o = 7.936 \cdot 10^5 Pa$ e $T_o = 250\ K$ da cui $G = 3190.77\ kg/m^2 s$. La portata in uscita è quindi $\dot{m} = GA = 1.59\ kg/s$. La variazione della pressione nel serbatoio dopo l'apertura della valvola di sfiato dipenderà dal bilancio tra due contributi di segno opposto: il flusso uscente dalla valvola farebbe diminuire nel tempo la massa di gas nel serbatoio mentre la reazione chimica, se non si arresta, continua a generare massa. In termini di bilancio di massa avremo:

$$\frac{MV}{RT}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = M\dot{n}_0 \exp[kt] - AK_1 p \tag{64}$$

da integrare in t a partire dal valore di pressione $p = 15\ atm$ all'istante di apertura della valvola. L'equazione differenziale è del tipo:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = A_1 \exp[kt] - A_2 p \tag{65}$$

la cui soluzione risulta essere la somma di un contributo esponenzialmente crescente (derivante dalla reazione chimica) e un contributo esponenzialmente decrescente, derivante dallo svuotamento. La soluzione dell'equazione differenziale sarà del tipo:

$$p(t) = C_1 \exp[kt] + C_2 \exp[-A_2 t] \tag{66}$$

dove C_1 e C_2 sono valori da determinare. La derivata della soluzione tipo fornisce:

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = C_1 k \exp[kt] - C_2 A_2 \exp[-A_2 t] = \tag{67}$$

$$= A_1 \exp[kt] - A_2(C_1 \exp[kt] + C_2 \exp[-A_2 t]) \tag{68}$$

Equagliando i termini in $\exp[kt]$ si ricava:

$$C_1 k = A_1 - A_2 C_1 \rightarrow C_1 = A_1/(k + A_2) \tag{69}$$

C_2 si ricava invece imponendo il valore iniziale della pressione ($C_2 = p(0) - A_1/(k + A_2)$). La componente esponenzialmente crescente della soluzione prevale in tempi rapidi, portando ad aumento comunque incontrollabile della pressione nel serbatoio (l'apertura della valvola di sfogo può rallentare, ma non invertire il trend crescente per la pressione).

g.

1. Essendo le trasformazioni adiabatiche, il rapporto critico tra la pressione nel serbatoio, p_s, e la pressione nella sezione di sbocco, p_o, è dato da:

$$\left(\frac{p_s}{p_o}\right)_{cr} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.83 \qquad per\ \ \gamma = 1.33 \tag{70}$$

La pressione minima critica per avere efflusso sonico dalla sezione di rottura è $p_{s,min,cr} = 1.83 \cdot 10^5 Pa$. La pressione nel serbatoio nell'istante in cui si produce la rottura è $10\ atm > p_{s,min,cr}$ per cui il flusso è sonico.

2. Il flusso specifico uscente è dato da

$$G = \sqrt{\gamma p_o \rho_o} = \sqrt{\gamma \frac{M}{RT_o}} p_o \tag{71}$$

dove $p_o^{\gamma-1} T_o^{\gamma} = p_s^{\gamma-1} T_s^{\gamma}$ per la trasformazione adiabatica e $(T_s/T_o) = (p_s/p_o)_{cr}^{(\gamma-1)/\gamma} = (\gamma+1)/2 = 1.165$ utilizzando il rapporto critico tra le pressioni. Risulta $p_o = 5.46 \cdot 10^5 Pa$ e $T_o = 251.5\ K$ da cui $G = 1510.35\ kg/m^2 s$. La portata scaricata è $\dot{m} = 0.474\ kg/s$.

3. Anche quando la pressione nel serbatoio scende fino a 3 atm, il deflusso rimane critico. L'equazione di conservazione della massa scritta per il serbatoio è :

$$\frac{MV}{RT}\frac{dp_s}{dt} = -GA = -A\sqrt{\gamma\frac{M}{RT_o}} p_o = \tag{72}$$

$$= -A\sqrt{\gamma p_s \rho_s \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \tag{73}$$

da cui

$$\frac{\mathrm{d}p_s}{\mathrm{d}t} = -\frac{A}{V}\sqrt{\gamma\frac{RT_o}{M}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}\, p_s = -K_T p_s \tag{74}$$

con $K_T = 0.008467$. Separando le variabili e integrando si ottiene

$$p_s(t) = p_s(0)\,(1 - \exp(-K_T t)) \tag{75}$$

da cui si ricava il tempo t:

$$t = \frac{1}{k}\ln\frac{p_s(0)}{p_s(t)} = 142\ s \tag{76}$$

4. La massa di gas fuoriscita mentre la pressione del serbatoio varia da 10 atm a 3 atm è data da:

$$\Delta m = M(n_i - n_f) = \frac{MV}{RT_s}(p_{s,i} - p_{s,f}) = 45.98\ kg \tag{77}$$

h.

1. La portata da trasportare corrisponde ad un flusso specifico pari a $G = w/A = 407.43\ kg/m^2 s$. Indicata con 1 la pressione a monte della linea e con 2 la pressione in corrispondenza della sezione di sbocco nel serbatoio B, il minimo valore di flusso trasportabile in condizioni soniche è dato da:

$$G_{min,cr} = \sqrt{p_2 \rho_2} = \sqrt{\frac{M}{RT}} p_2 \tag{78}$$

dove p_2 è al limite uguale alla pressione dell'ambiente di sbocco, p_{atm}. Risulta $G_{min,cr} = 359.38\ kg/m^2 s$. Essendo $G > G_{min,cr}$ il flusso è sonico.

2. La pressione alla sezione di sbocco è data da

$$p_2 = \frac{G}{\sqrt{M/RT}} = 1.133 \cdot 10^5 Pa \tag{79}$$

3. La pressione nel serbatoio di alimentazione, che può essere considerata coincidente con p_1, va ricavata calcolando il rapporto critico tra le pressioni che si stabilisce tra monte e valle della tubazione in condizioni di regime sonico. Dall'equazioni di Bernoulli scritta per tubazione isoterma in condizioni critiche si ha:
$$\ln\frac{p_1}{p_2}+\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2\right)+2f\frac{L}{D}=0 \tag{80}$$
da cui si può ricavare il rapporto critico:
$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{II}=\sqrt{1+4f\frac{L}{D}+\left(2\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{I}\right)} \tag{81}$$
Essendo G noto, si può ricavare f utilizzando la legge di Blasius, $f=0.079Re^{-0.25}=0.0024$. Trascurando inizialmente il termine logaritmico, si ricava $p_1/p_2=7.655$ e iterando si converge a $(p_1/p_2)_{cr}=7.921$. Poiché è nota la pressione di valle, la pressione di monte risulta $p_1=(p_1/p_2)_{cr}p_2=8.974\cdot10^5Pa$.

4. Se il serbatoio si fora, assumendo che l'efflusso dal serbatoio sia isotermo si ha $p_A/p_o=e^{0.5}=1.648$. Il minimo valore di pressione nel serbatoio in grado di generare condizioni di efflusso sonico è $p_{A,min,cr}=1.648\cdot10^5Pa$. Poiché quando si produce il foro è $p_A=p_1=8.974\cdot10^5Pa>p_{A,min,cr}$ il deflusso sarà sonico. Per flusso sonico isotermo $G=\sqrt{p_o\rho_o}=\sqrt{M/RT}p_o$ con $p_o=(p_1/p_2)_{cr}^{-1}p_A=5.44\cdot10^5\ Pa$, risulta $G=1955.06\ kg/m^2s$ e $\dot{m}=GA=0.614\ kg/s$.

i.

Assumiamo che le perdite di pressione all'imbocco (1) e allo sbocco (2) siano trascurabili rispetto alle perdite di pressione lungo la linea per cui $p_A\sim p_1$ e $p_2\sim p_B$.

1. Nel caso che le perdite per attrito siano trascurabili, Bernoulli sulla linea di trasporto è dato da:
$$\frac{1}{2}dv^2+\frac{dp}{\rho}+gdh=0 \tag{82}$$
dove abbiamo tenuto il termine gravitazionale essendo le pressioni molto maggiori della pressione atmosferica. Bernoulli differenziale può essere integrato come:
$$\frac{v_2^2}{2}-\frac{v_1^2}{2}+g(h_2-h_1)+\frac{RT}{M}\ln\frac{p_B}{p_A}=0 \tag{83}$$
dove $v_2=G/\rho_2$ e $v_1=G/\rho_1$ con ρ_1 e ρ_2 ricavabili dalla pressione nei serbatoi e dalla T attraverso la legge dei gas $\rho=pM/RT$. Risulta:
$$\frac{G^2}{2}\left(\frac{RT}{M}\right)^2\Big(\frac{1}{p_B^2}-\frac{1}{p_A^2}\Big)+$$
$$+g(h_2-h_1)+\frac{RT}{M}\ln\frac{p_B}{p_A}=0 \tag{84}$$
da cui si ricava G.

2. Nel caso che le perdite di attrito abbiano grandezza paragonabile alle perdite viscose, Bernoulli risulta:
$$\frac{1}{2}dv^2+\frac{dp}{\rho}+gdh=-2\frac{f}{D}v^2dx \tag{85}$$
É anche $dx=dh/cos\alpha$ e, poichè non si sa come varia v lungo il tubo, bisogna esprimere v attraverso G (costante lungo il tubo). Si ottiene:
$$-G^2\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\rho\mathrm{d}p+2\frac{f}{D}G^2dx+\rho^2g\mathrm{d}h=0 \tag{86}$$
Sostituendo dx e dp si ricava:
$$\Big(-\frac{G^2}{\rho}+\rho\frac{RT}{M}\Big)d\rho=-\Big(\frac{2fG^2}{D\cos\alpha}+\rho^2g\Big)dh \tag{87}$$
e separando le variabili si ottiene:
$$\frac{-G^2/\rho+\rho RT/M}{2fG^2/D\cos\alpha+\rho^2g}\mathrm{d}\rho=-\mathrm{d}h$$
o, più semplicemente
$$f(\rho)\cdot\mathrm{d}\rho=-\mathrm{d}h\quad. \tag{88}$$
L'integrale può essere risolto scomponendo la funzione $f(\rho)$ in fattori, essendo il grado del polinomio del numeratore inferiore a quello del denominatore. L'espressione, una volta integrata, consente di esplicitare il flusso specifico G trasmesso tra i due serbatoi.

j.

1. Per determinare la portata uscente all'istante iniziale dal pozzo, bisogna determinare i flusso specifico G. La pressione nel pozzo è abbastanza alta da far supporre che il flusso sia sonico, tuttavia, è possibile identificare a priori il regime di flusso:

   - assumiamo che, essendo la linea lunga, la caduta di pressione tra serbatoio e inizio linea sia trascurabile rispetto a quella lungo la linea ($p_0\simeq p_1$);
   - per trasformazioni isoterme e flusso critico, il rapporto tra le pressioni a inizio linea, p_1, e fine linea, p_2, è dato
   $$\ln\frac{p_1}{p_2}+\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2\right)+2f\frac{L}{D}=0 \tag{89}$$
   Questa equazione può essere risolta per via iterativa se sono note le caratteristiche della

linea e se si ipotizza un valore per il coefficiente f (per esempio, $f = 0.003$) assumendo:

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^I = \sqrt{1 + 4f\frac{L}{D}} \tag{90}$$

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{II} = \sqrt{1 + 4f\frac{L}{D} + \left(2\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^I\right)} \tag{91}$$

che converge dopo un paio di iterazioni. Nel caso specifico, dopo 2 iterazioni, si ottiene un valore stabile $(p_1/p_2)_{cr} = 10.08$ da cui è possibile verificare che il flusso dal pozzo sarà sonico finché la pressione all'interno del giacimento non scende sotto $p_{0,min,crit} = 10.08\ p_{atm} = 10.08 \cdot 10^5 Pa$. Nelle condizioni iniziali è $p_0 = 25 \cdot 10^5 Pa > p_{0,min,crit}$ per cui il flusso è sonico.

Essendo il flusso sonico, il flusso specifico uscente dipende dalle condizioni che si instaurano sulla sezione di sbocco, che sono diverse da quelle dell'ambiente di sbocco e legate attraverso il rapporto critico a quelle all'interno del giacimento. Si ha:

$$G = \sqrt{p_2\rho_2} = \sqrt{\frac{M}{RT}p_2^2} = \sqrt{\frac{M}{RT}}p_2 \tag{92}$$

dove si è utilizzata la legge dei gas per legare ρ_2 e p_2 all'uscita, e utilizzando il rapporto critico tra le pressioni:

$$G = \sqrt{\frac{M}{RT}}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-1}_{crit} p_1 = K_1 p_1 \tag{93}$$

Da questa si calcola $G = 635.62\ kg/m^2s$, e quindi una portata $\dot{m} = G \cdot A = 4.99\ kg/s$.

2. Si osserva che la pressione a testa pozzo a inizio svuotamento è data da:

$$p_2(0) = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-1}_{cr} p_1(0) = 2.48\ atm \tag{94}$$

maggiore di quella a cui è sufficiente avere il gas in uscita. La valvola di regolazione a testa pozzo indurrà perdite di carico aggiuntive riducendo la pressione a fine linea da 2.48 atm al valore desiderato finché sarà necessario, cioè finché la pressione nel giacimento riuscirà a spingere la portata fissata. Il tempo di esaurimento è determinato dal valore di pressione per cui il gas arriva a testa pozzo esattamente con la pressione di $1.5 \cdot 10^5$ in assenza di laminazione (valvola di regolazione completamente aperta). Il flusso specifico convogliato utilizzando la valvola di regolazione è in valore inferiore al minimo flusso sonico, dato da:

$$G_{min,crit} = \sqrt{\frac{M}{RT}}p_{atm} = 256.28\ kg/s \tag{95}$$

per cui la relazione tra la pressione in testa pozzo e la pressione a fine pozzo è data da (Bernoulli isotermo lungo tubazione):

$$G^2 \ln\frac{p_1}{p_2} + \frac{M}{2RT}\left(p_2^2 - p_1^2\right) + \frac{2fL}{D}G^2 = 0 \tag{96}$$

che trascurando il termine logaritmico può essere risolta per p_1 note $p_2 = 1.5\ atm$ e $G = 180\ kg/s$. Questo valore di p_1^* è quello che identifica l'esaurimento del giacimento. Ipotizzando che, a parte un trascurabile istante iniziale, la portata uscente sia regolata dalla valvola, il tempo di esaurimento si calcola come:

$$\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{RT}{MV}\frac{\pi d^2}{4}G \tag{97}$$

$$\int_{p_1(0)}^{p_1^*} \mathrm{d}p_1 = -\frac{RT}{MV}\frac{\pi D^2}{4}Gt^* \tag{98}$$

da cui si ricava

$$t^* = \frac{4MV(p_1(0) - p_1^*)}{\pi D^2 GRT} \tag{99}$$

k.

---

1. Il bilancio di massa eseguito sul fluido contenuto nel serbatoio fornisce:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{VM}{RT}\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t} = -AG \tag{100}$$

Questa equazione deve essere integrata utilizzando per G l'espressione più adatta in base al regime di flusso (sonico o non sonico). Il valore di pressione nel serbatoio ($1\ MPa = 10\ atm$) lascia supporre che il flusso sia sonico. Tuttavia, si può identificare analiticamente se questa ipotesi è corrretta: per trasformazioni isoterme e flusso critico, il rapporto tra le pressioni a inizio linea, $p_1 \simeq p_0$, e fine linea, p_2, è dato

$$\ln\frac{p_1}{p_2} + \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2\right) + 2f\frac{L}{D} = 0 \tag{101}$$

Questa equazione può essere risolta per via iterativa se sono note le caratteristiche della linea e se si ipotizza un valore per il coefficiente f (per esempio, $f = 0.003$) assumendo:

$$\frac{p_1}{p_2}^{I\ tent} = \sqrt{1 + 4f\frac{L}{D}} \tag{102}$$

$$\frac{p_1}{p_2}^{II\ tent} = \sqrt{1 + 4f\frac{L}{D} + 2\ln\frac{p_1}{p_2}^{I\ tent}} \tag{103}$$

$$\frac{p_1}{p_2}^{III\ tent} = \sqrt{1 + 4f\frac{L}{D} + 2\ln\frac{p_1}{p_2}^{II\ tent}} \tag{104}$$

$$\ldots \tag{105}$$

$$\tag{106}$$

che converge dopo un paio di iterazioni. Nel caso specifico, dopo 3 iterazioni, si ottiene un valore stabile:

$$\frac{p_1}{p_2}_{crit} = 3.97 \tag{107}$$

e indica che ci saranno condizioni di flusso sonico finché la pressione nel serbatoio non scenderà a $p_1^* = 3.97 p_{atm}$. Questo valore fornisce l'estremo inferiore di integrazione per determinare la durata del flusso sonico. Per integrare l'equazione 111 bisogna trovare l'espressione per G che è :

$$G = \sqrt{p_1 \rho_1} \tag{108}$$

con p_2 e ρ_2 condizioni del gas alla sezione di sbocco, legate alle condizioni a inizio linea attraverso il rapporto critico delle pressioni,

$$G = \sqrt{\frac{M}{RT} p_2^2} = \sqrt{\frac{M}{RT}} p_2 = \tag{109}$$

$$= \sqrt{\frac{M}{RT}} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{crit}^{-1} p_1 = K_1 p_1 \tag{110}$$

La conservazione della massa diventa:

$$\frac{VM}{RT} \frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} = -AK_1 p_1 \tag{111}$$

che può essere integrata come:

$$\int_{p_1(0)}^{p_1^*} \frac{\mathrm{d}p_1}{p_1} = \frac{AK_1 RT}{MV} t \tag{112}$$

da cui

$$t = \ln \frac{p_1(0)}{p_1^*} \frac{MV}{AK_1 RT} \tag{113}$$

2. Se il serbatoio scaricasse direttamente in atmosfera, cambierebbe il flusso specifico G e la relazione tra questo e la portata all'interno del serbatoio. In particolare, ripartendo dall'equazione di Bernoulli scritta per lo svuotamento del serbatoio senza condotto, utilizzando la trasformazione isoterma per integrare il termine $\mathrm{d}p/\rho$ e derivando rispetto a p_2, pressione allo sbocco, per individuare le condizioni di flusso critico si ottiene:

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{crit} = \ln 2 = 0.69 \tag{114}$$

Nell'equazione di conservazione si modificano:

- l'estremo di integrazione $p_1^* = p_{atm}/0.69$
- il valore della costante K_1, che contiene il nuovo valore del rapporto critico.