Soluzioni Homework N^o 1: trasporto di fluidi incomprimibili

a.

---

1. Essendo noto il diametro D della tubazione e la portata volumetrica Q da alimentare, si ricava la velocità lungo la linea di sollevamento $v = Q/A = 4Q/\pi D^2 = 2.55\ m/s$. Applicando Bernoulli tra pelo libero del serbatoio (A) e sbocco della condotta (B) si ha:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A + \Delta p_{pump} = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B + l_v$$

con Δp_{pump} prevalenza della pompa. L'equazione può essere semplificata tenendo conto che $v_B = v$, $p_A = p_B = p_{atm}$ e $v_A = 0$ nel serbatoio:

$$\Delta p_{pump} = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g(h_B - h_A) + l_v \tag{1}$$

Le perdite viscose sono date da:

$$l_v = 2f\frac{L}{D}\rho v^2 \tag{2}$$

con il fattore di attrito per tubi lisci dato dalla legge di Blasius:

$$f = 0.079 Re^{-0.25} = 0.079\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right)^{-0.25} = 0.0035$$

La prevalenza della pompa risulta $\Delta p_{pump} = 2.08 \cdot 10^5\ Pa$ e la potenza della pompa è pari a:

$$P = Q \cdot \Delta p_{pump} = 4.17\ kW \tag{3}$$

2. Se la tubazione è rugosa con scabrezza superficiale pari a $k = 1\ mm$, dall'equazione di Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.7\ln\left(\frac{k}{D} + \frac{4.67}{Re\sqrt{f}}\right) + 2.28 \tag{4}$$

iterando a partire dal valore di f calcolato per tubi lisci si ottiene $f = 0.00985$ da cui risulta $P = 4.5\ kW$.

b.

---

1. Possiamo schematizzare la tubazione di drenaggio come una serie di segmenti di tubo (di lunghezza $\Delta h = 4\ m$) di diverso diametro connessi in serie. Ad ogni connessione, la portata che deve essere drenata aumenta di una quota pari alla portata raccolta da una canaletta. La superficie di raccolta della condensa scaricata da ogni canaletta è :

$$S_c = \pi D \Delta h = 100.53\ m^2 \tag{5}$$

con Δh distanza tra le canalette. La portata volumetrica drenata da ogni canaletta è :

$$Q_c = \frac{\dot{q} S_c}{\rho} = 1.01 \cdot 10^{-3}\ m^3/s \tag{6}$$

Per ogni segmento verticale di tubo di drenaggio, il diametro minimo della tubazione è quello che permette di vincere le perdite di carico con l'energia gravitazionale disponibile:

$$\rho g \Delta h = 2f\frac{\Delta h}{D}\rho v^2 \tag{7}$$

Esprimendo la velocità in funzione della portata ed esplicitando il fattore d'attrito (Blasius per tubi lisci), si ricava

$$D = \left(k\rho^{-0.25}\mu^{0.25}Q^{1.75}\right)^{1/4.75} \tag{8}$$

con $k = 0.0245$ costante numerica. L'equazione 8 stabilisce, per ogni valore di portata, quale deve essere il diametro del tubo di drenaggio. La portata da drenare aumenta in modo discreto in corrispondenza di ogni canaletta spostansosi dall'alto verso il basso. In corrispondenza del drenaggio dalla prima canaletta (alla sommità della colonna) è $Q = 1.01 \cdot 10^{-3} m^3/s$ e $D_{I^a}^{min} = 0.017m$. In corrispondenza del drenaggio dall'ultima canaletta è $Q_{tot} = n_c \cdot Q_c = 2.02 \cdot 10^{-2} m^3/s$ e $D_{n_c}^{min} = 0.053m$.

c.

---

1. Noto il volume del serbatoio B ed il tempo entro cui deve essere realizzato il riempimento, la portata necessaria è determinata come:

$$Q = \frac{V_B}{t} = 0.0044\ m^3/s \tag{9}$$

In fase di riempimento, la velocità è data da:

$$v = \frac{4Q}{\pi D^2} = 0.56\ m/s \tag{10}$$

Applicando Bernoulli tra il serbatoio A e il serbatoio B si ha:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A + \Delta p_{pump} = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h + l_v$$

Poiché è $p_A = p_B = p_{atm}$ e la velocità è nulla in entrambi i serbatoi si ricava per la prevalenza della pompa:

$$\Delta p_{pump} = \rho g(h - h_A) + l_v \tag{11}$$

L'energia fornita dalla pompa serve per sollevare il fluido e per vincere le perdite di carico. Le perdite di carico sono date da:

$$l_v = 2f\frac{L}{D}\rho v^2 \tag{12}$$

con il fattore d'attrito dato dalla legge di Blasius, $f = 0.079Re^{-0.25} = 0.0051$ per cui risulta $l_v = 4510\ Pa$. Il termine di sollevamento è invece $\rho g(h - h_A) = 5.788 \cdot 10^5 Pa$ (molto maggiore delle perdite viscose) per cui si ottiene $\Delta p_{pump} = 5.83300 \cdot 10^5\ Pa$ e $P = Q \cdot \Delta p_{pump} = 2.6\ kW$.

d.

---

1. Il costo annuo totale per la realizzazione e il funzionamento dell'impianto è dato dalla somma dei costi di investimento (acquisto tubazioni e stazione di pompaggio) ripartiti sugli anni di durata dell'impianto, N_y, e i costi di esercizio (energia per far funzionare la stazione di pompaggio) dati rispettivamente da:

$$C_I = \frac{k_t D L_{tot} + k_p P/10^3}{N_y} \tag{13}$$

$$C_E = k_e N_h P/10^3 \tag{14}$$

$$C_{tot} = C_I + C_E = \frac{k_t D L_{tot} + k_p P/10^3}{N_y} + k_e N_h P/10^3 =$$

$$= \frac{k_t L_{tot}}{N_y} D + \left(\frac{k_p}{N_y} + k_e N_h\right)\frac{P}{10^3} \tag{15}$$

dove $P = \Delta p Q/\eta$ è la potenza della pompa da installare. Indicato con 1 il punto a monte del parallelo e con 2 il punto a valle, la lunghezza totale delle tubazioni è data da $L_{tot} = L_{A1} + 2L_{12} + L_{2B} = 10520\ m$. Se il ramo senza pompa è chiuso da una valvola, possiamo valutare la prevalenza della pompa scrivendo Bernoulli tra i serbatoi A e B

$$\rho g h_A + \Delta p_{pump} = 2f\frac{L'}{D}\rho v^2 \tag{16}$$

dove si è tenuto conto che $L' = 6520\ m$ è la lunghezza di tubo per cui si hanno perdite di carico, e, nei serbatoi A e B, la pressione è la stessa e la velocità è nulla. Si ricava

$$\Delta p_{pump} = 2f\frac{L'}{D}\rho v^2 - \rho g h_A \geq 0 \tag{17}$$

Ovviamente sarà necessario installare una pompa per trasportare il flusso solo se il valore ΔP_{pump} risulta maggiore di zero. Se $\Delta P_{pump} < 0$ infatti il tubo sarebbe abbastanza grande da produrre perdite di carico inferiori all'energia disponibile come energia gravitazionale al serbatoio A. Se la tubazione ha diametro abbastanza grande quinsi, non è necessario installare alcuna pompa. Possiamo usare l'equazione 17 per calcolare il valore del diametro della tubazione per cui non sarebbe necessaria la pompa. Utilizzando l'equazione di Blasius per esprimere f ed esprimendo $v = 4Q/\pi D^2$ si ricava:

$$2 \cdot 0.079 \left(\frac{4\rho}{\pi\mu}\right)^{-0.25} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 L'Q^{1.75}\frac{1}{D^{4.75}} =$$

$$= \frac{k}{D^{4.75}} = gh_A \tag{18}$$

con $k = 167.22$ da cui si ricava $D = 0.967\ m$. Se $D > 0.967\ m$ non serve installare alcuna pompa. Questa soluzione potrebbe rappresentare l'ottimo economico se la tubazione costasse poco rispetto all'acquisto e all'esercizio della stazione di pompaggio. Per ricavare il diametro ottimo dobbiamo calcolare la potenza di pompaggio ed esprimere i costi totali in funzione del diametro della tubatura. La potenza della pompa da acquistare è $P = \Delta p Q/\eta$, cioè

$$P = \frac{\rho Q}{\eta}\left(\frac{k}{D^{4.75}} - gh_A\right) = k_1 D^{-4.75} - k_2 \tag{19}$$

che per $\eta = 1$ dà $k_1 = 3.3444 \cdot 10^5$ e $k_2 = 3.924 \cdot 10^5$. L'equazione del costo totale diventa

$$C_{tot}(D) = k_a D + k_b P = k_a D + k_b(k_1 D^{-4.75} - k_2)$$

con $k_a = 9.468 \cdot 10^5$ e $k_b = 0.925$. Il diametro ottimo corrisponde al minimo del costo totale:

$$\frac{\mathrm{d}C_{tot}(D)}{\mathrm{d}D} = k_a - 4.75k_b \cdot k_1 D^{-5.75} = 0 \tag{20}$$

da cui

$$\frac{\mathrm{d}C_{tot}(D)}{\mathrm{d}D} = k_a - 4.75k_b \cdot k_1 D^{-5.75} = 0 \tag{21}$$

$$D = \left(\frac{k_a}{4.75k_b \cdot k_1}\right)^{-1/5.75} \tag{22}$$

e $D = 1.079\ m$. Per questo valore di diametro la potenza della pompa è negativa, indicazione che la pompa non è di fatto necessaria. La soluzione ottima è quindi quella senza pompa, con $D = 0.967\ m$ (o taglia immediatamente maggiore disponibile in commercio).

2. La potenza della pompa è nulla. Il costo dell'impianto è $C_{tot} = 915.55\ kEuro$.

3. Il problema è relativamente semplice visto che sappiamo dai punti precedenti che, se funziona un

ramo solo, non è economicamente vantaggioso installare la pompa. Se funzionano i due rami del parallelo e non c'è pompa, la portata si bipartisce esattamente. Scrivendo Bernoulli tra i serbatoi A e B seguendo uno dei due rami del parallelo abbiamo:

$$\rho g h_A = 2 f_{A1} \frac{L_{A1} + L_{2B}}{D} \rho v^2 + 2 f_{12} \frac{L_{12}}{D} \rho v_{12}^2 \quad (23)$$

dove sappiamo che $v_{12} = v/2$. Utilizzando di nuovo Blasius per esprimere f e v in funzione di Q si ottiene:

$$g h_A = 2 \cdot 0.079 \left(\frac{4\rho}{\pi\mu} \right)^{-0.25} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \cdot$$

$$\cdot Q^{1.75} (L_{A1+2B} + L_{12} 2^{-1.75}) \frac{1}{D^{4.75}} = k_c \frac{1}{D^{4.75}}$$

con $k_c = 95.133$ da cui si può ricavare $D = 0.858\ m$ (minore del caso precedente). Il costo dell'impianto in questo caso è 812.972 $kEuro$.

Se non sapessimo nulla dell'impianto, il problema andrebbe risolto impostando le equazioni di Bernoulli per ogni tratto e l'equazione di continuità ad uno dei due nodi del parallelo. In particolare, indicata con Q la portata che scorre da A a B e ipotizzando che in corrispondenza dei 2 rami la portata si ripartisca lungo il ramo senza e con pompa secondo l'equazione di continuità al nodo 1 come:

$$Q = K_Q \cdot Q + (1 - K_Q) Q \quad (24)$$

avremmo, Bernoulli A-1:

$$p_{atm} + \rho g h_A = p_1 + 2 f \frac{L_{A1}}{D} \rho \left(\frac{4Q}{\pi D^2} \right)^2 \quad (25)$$

Bernoulli 2-B:

$$p_2 = p_{atm} + 2 f \frac{L_{2B}}{D} \rho \left(\frac{4Q}{\pi D^2} \right)^2 \quad (26)$$

Bernoulli 1-2 (ramo senza pompa)

$$p_1 = p_2 + 2 f' \frac{L_{12}}{D} \rho \left(\frac{4 Q K_Q}{\pi D^2} \right)^2 \quad (27)$$

Bernoulli 1-2 (ramo con pompa)

$$p_1 + \Delta p_{pump} = p_2 + 2 f" \frac{L_{12}}{D} \rho \left(\frac{4Q(1 - K_Q)}{\pi D^2} \right)^2 \quad (28)$$

dove f' ed $f"$ sono i fattori di attrito calcolati con riferimento alla portata locale nei tratti del parallelo. Combinando le equazioni di Bernoulli si può esprimere la prevalenza della pompa in funzione del diametro: dall'equazione 25 e 26 si ha:

$$p_1 - p_2 = \rho g h_A - 2 f \frac{L_{A1} + L_{2B}}{D} \rho \left(\frac{4Q}{\pi D^2} \right)^2 \quad (29)$$

e dalle 27 ed 28

$$\Delta p_{pump} = -(p_1 - p_2) + 2 f" \frac{L_{12}}{D} \rho \left(\frac{4Q(1 - K_Q)}{\pi D^2} \right)^2 =$$

$$= -\rho g h_A + 2 f \frac{L_{A1} + L_{2B}}{D} \rho \left(\frac{4Q}{\pi D^2} \right)^2 +$$

$$+ 2 f" \frac{L_{12}}{D} \rho \left(\frac{4Q(1 - K_Q)}{\pi D^2} \right)^2$$

da cui si può calcolare la potenza della pompa $P = \Delta p \cdot Q (1 - K_Q)$ che risulta funzione sia del diametro che di K_Q. Combinando le equazioni 29 e 27 si ricava la relazione tra K_Q e D:

$$\rho g h_A - 2 f \frac{L_{A1} + L_{2B}}{D} \rho \left(\frac{4Q}{\pi D^2} \right)^2 = 2 f' \frac{L_{12}}{D} \rho \left(\frac{4Q \cdot K_Q}{\pi D^2} \right)^2 \quad (30)$$

da cui si ricava una espressione per $K_Q = f(D)$. Queste equazioni esprimono il fatto che, a seconda del diametro del tubo e della prevalenza della pompa e della portata totale trasferita da A a B, la portata può ripartirsi diversamente nei due rami del parallelo. In particolare, l'equazione 29 permette di assegnare in modo univoco la direzionedi movimento dell'acqua nel ramo del parallelo senza la pompa sulla base della portata totale trasferita e dell'altezza h_A. Se $p_1 - p_2$ è maggioredi zero, la velocità nel parallelo sarà quella ipotizzata; se $p_1 - p_2 < 0$ la velocità nel ramo senza pompa sarà da 2 a 1, in senso opposto aquello ipotizzato per la scrittura dell'equazione 27 che andrebbe riscritta come

$$p_1 = p_2 - 2 f' \frac{L_{12}}{D} \rho \left(\frac{4 Q K_Q}{\pi D^2} \right)^2 \quad (31)$$

Questo modificherebbe anche l'equazione di continuità 32 che diventerebbe:

$$Q + K_Q \cdot Q = (1 + K_Q) Q \quad (32)$$

In ogni caso, l'espressione del costo totale, funzione di D e K_Q, potrebbe essere derivata come derivata di funzione composta:

$$\frac{\mathrm{d}C_{tot}(D, K_Q(D))}{\mathrm{d}D} = \frac{\mathrm{d}C_{tot}(D, K_Q(D))}{\mathrm{d}K_Q} \frac{\mathrm{d}K_Q(D)}{\mathrm{d}D} = 0$$

ed eguagliata a zero per determinare il valore di D_{ott}.

e.

---

1. La portata volumetrica dell'olio è $Q = W/\rho = 1.875\ m^3/s$ e la velocità nel tubo $v = 4Q/\pi D^2 = 1.53\ m/s$. Il numero di Reynolds risulta:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = 127500 \quad (33)$$

da cui si può calcolare un valore di primo tentativo per f utilizzando la legge di Blasius, $f = 0.079Re^{-0.25} = 0.004$ Fissato $\epsilon = k/D$, dalla formula di Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.7 \ln \left(\epsilon + \frac{4.67}{Re\sqrt{f}} \right) + 2.28 \tag{34}$$

iterando si ottiene $f = 0.0056$. Il fattore di attrito è più elevato di quello calcolabile per tubo liscio.

I punti in cui la pressione statica del flusso potrebbe essere minima sono quelli a quota massima e alla fine di lunghe linee di trasporto. Per la geometria di oleodotto considerata, è probabile che il punto a minima pressione sia quello alla sommità della collina, C. Scrivendo Bernoulli tra A e un generico punto la condotta si ha:

$$p_A + \Delta p_{pump} = p(x) + \rho g h(x) + 2f\frac{x}{D}\rho v^2 + \frac{1}{2}\rho v^2$$

dove x è la posizione lungo la condotta e $h(x)$ è la quota del punto x. Il termine cinetico è trascurabile rispetto alle perdite viscose (tubo lungo) e si può ricavare come varia la pressione statica lungo la condotta:

$$p(x) = p_A + \Delta p_{pump} - \rho g h(x) - 2f\frac{x}{D}\rho v^2 \tag{35}$$

La pressione diminuisce all'aumentare della quota e della distanza percorsa. Considerato che l'energia per vincere le perdite viscose è minore dell'energia richiesta per il sollevamento del fluido, la posizione più alta è quella dove si raggiunge effettivamente la minima pressione statica $p(x)$. Imponendo $p_C = p_v = 2.4\ kPa$ e scrivendo Bernoulli dal bacino A al punto C si ottiene:

$$p_A + \Delta p_{pump} = p_C + \rho g h_C + 2f\frac{L_{AC}}{D}\rho v^2$$

da cui $\Delta p_{pump} = 3.78307 \cdot 10^5 Pa$. Si può verificare che se $p_C = 2.4\ kPa$, il fluido in C ha energia sufficiente per muoversi verso il basso fino al punto di scarico B. Bernoulli scritto C e B risulta:

$$p_C + \rho g h_C = p_B + 2f\frac{L_{CB}}{D}\rho v^2 \tag{36}$$

da cui

$$p_B = p_C + \rho g h_C - 2f\frac{L_{CB}}{D}\rho v^2 \tag{37}$$

Essendo $L_{BC} < L_{AB}$, risulta $p_B = 3.44 \cdot 10^5\ Pa > p_{atm}$ a indicare che c'è energia sufficiente per il trasporto. La pressione a fine linea è maggiore della pressione alla sommità della collina. La potenza della pompa risulta $P = Q \cdot \Delta p_{pump} = 709\ kW$.

f.

1. La portata volumetrica e la velocità del flusso nei rami che entrano/escono dal parallelo sono $Q = W/\rho = 0.02\ m^3/s$ e $v = Q/A = 4Q/\pi D^2 = 1.13\ m/s$. Il numero di Reynolds è $Re = \rho v D/\mu = 169500$ e il fattore di attrito, utilizzando la legge di Blasius, è $f = 0.079Re^{-0.25} = 0.0039$. L'equazione di Bernoulli scritta tra il serbatoio A e il punto di ingresso nel parallelo (1) è :

$$p_A + \rho g h_A = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_{A1}^2 + 2f\frac{L_{A1}}{D}\rho v_{A1}^2 \tag{38}$$

dove si è considerata nulla la velocità nel serbatoio e si può trascurare la componente cinetica rispetto alle perdite viscose lungo il tubo. Esplicitando p_1 e sostituendo i valori numerici risulta $p_1 = 2.63 \cdot 10^5\ Pa$. Applicando Bernoulli dal nodo di uscita dal parallelo (2) al serbatoio B, si ottiene:

$$p_2 = p_B + 2f\frac{L_{2B}}{D}\rho v_{2B}^2 = 2.3279 \cdot 10^5\ Pa \tag{39}$$

dove si è trascurato il termine cinetico e considerato $v_{A1} = v_{2B}$. Poiché è $p_1 > p_2$, è fissato il verso di percorrenza del flusso nei due rami del parallelo. L'equazione di Bernoulli scritta per il ramo senza pompa permette di determinare il flusso che attraverso queso ramo:

$$p_1 = p_2 + 2f\frac{L_{12}}{D}\rho v_{12}^2 \tag{40}$$

da cui sostituendo Balsius si ricava

$$v_{12} = \left[\frac{(p_1 - p_2)D^{1.25}}{0.158\rho^{0.75}\mu^{0.25}L_{12}} \right]^{\frac{1}{1.75}} = 0.32\ m/s \tag{41}$$

Dalla continuità a uno dei due nodi (1) o (2), si ottiene:

$$v_{A1} = v_{1P2} + v_{12} \rightarrow v_{1P2} = 0.81\ m/s \tag{42}$$

e si può calcolare $Re = 121500$ ed $f = 0.0042$. Dall'equazione di Bernoulli scritta per il ramo di parallelo contenente la pompa la prevalenza risulta:

$$\Delta p_{pump} = p_2 - p_1 + 2f\frac{L_{1P2}}{D}\rho v_{1P2}^2 = 1.178 \cdot 10^5 Pa \tag{43}$$

da cui si ricava la potenza $P = 1.686\ kW$.

2. Ipotizziamo inizialmente che la portata che fuoriesce dalla tubazione sia piccola rispetto a quella che circola nel tubo. In queste condizioni, la rottura non dovrebbe produrre sostanziali ridistribuzioni di flusso e variazioni di pressione nel serbatoio. La pressione nel tubo in corrispondenza del punto di rottura è data da Bernoulli tra il punto di rottura e 2:

$$p_R = p_2 + 2f\frac{L_{R2}}{D}\rho v_{12}^2 = 2.6979 \cdot 10^5\ Pa \tag{44}$$

Utilizzando l'equazione dell'orifizio per calcolare la velocità di uscita del liquido dal foro

$$v_e = 0.62\sqrt{\frac{2(p_r - p_{atm})/\rho}{1-(A_R/A)^2}} \tag{45}$$

dove A_R è la sezione della rottura e A è la sezione del tubo. Essendo $A_R/A = 0.0028$ risulta $v_e = 18.42\ m/s$ e $Q_e = 0.92\ \cdot 10^{-3} m^3/s$. La portata che circola nel ramo 12 è $Q_{12} = 14.3 \cdot 10^{-3} m^3/s$, circa 15 volte superiore rispetto a quella che esce, per cui la perdita non modificherà significativamente le condizioni di funzionamento del circuito.

Quando la portata uscente risulta significativa rispetto a quella del circuito senza rottura, non si può assumere che la perdita non abbia effetti su distribuzione dei flussi e pressione in impianto. Per risolvere il problema bisogna impostare l'equazione di Bernoulli per ogni tratto (A1, 1P2, 1R, R2, 2B), l'equazione di continuità per due dei tre nodi (1, R e 2) del circuito e l'equazione dell'orifizio. Si ottengono 5+2+1 equazioni in 8 incognite (p_1, p_2, p_R, v_{A1}, v_{1R}, v_{R2}, v_{1P2} e v_e) da cui si ricavano le nuove condizioni di funzionamento.

g.

---

1. A valvola V chiusa, la velocità del fluido lungo la condotta è $v = 4Q/\pi D^2 = 3.02\ m/s$, $Re = 59433.6$ e la formula di Blasius per tubi lisci dà per il fattore di attrito $f = 0.079Re^{-0.25} = 0.0051$. La prevalenza della pompa è data da (Bernoulli tra serbatoio A e B)

$$p_A + \rho g h_A + \Delta p_{pump} = p_B + \rho g h_B + 2f\frac{L_{AB}}{D}\rho v^2 \tag{46}$$

dove si sono considerate nulle le velocità nei serbatoi. Essendo $p_A = p_B$, esplicitando Δp_{pump} si ottiene

$$\Delta p_{pump} = \rho g(h_B - h_A) + 2f\frac{L_{AB}}{D}\rho v^2 \tag{47}$$

dove il primo termine rappresenta l'energia richiesta per il sollevamento del fluido e il secondo le perdite viscose. Facendo i conti, le perdite viscose risultano prevalenti (la velocità del fluido è elevata) e si ha

$$\Delta p_{pump} = 2.41326 \cdot 10^5 + 11.25163 \cdot 10^5 = 13.665 \cdot 10^5 Pa \tag{48}$$

La potenza della pompa risulta $P = Q\Delta p_{pump} = 46.60\ kW$.

2. Quando si apre la valvola V, si modifica la portata in tutti i rami del circuito. Per risolvere il circuito bisogna scrivere Bernoulli per ogni tratto (A-1, 1-P-2, 2-B e 1-V-2) e l'equazione di continuità per uno dei due nodi (1) o (2). Le incognite sono le velocità in tre rami (A1, 1V2 e 1P2) e la pressione nei nodi 1 e 2. Non sappiamo a priori quale sarà la direzione del flusso nei vari rami: possiamo però iniziare a scrivere Bernoulli per i rami su cui sappiamo più cose. Bernoulli tra 1 e 2 (lato pompa) è :

$$p_1 + \Delta p_{pump} = p_2 \rightarrow p_2 - p_1 = \Delta p_{pump} > 0 \tag{49}$$

Sappiamo quindi che il flusso nel parallelo andrà da 2 a 1 nel ramo della valvola:

$$p_2 = p_1 + 2f\frac{L_{12}}{D}\rho v_{1V2}^2 = p_1 + kL_{12}v_{1V2}^{1.75} \tag{50}$$

con $k = 91.156$. Se assumiamo che la potenza della pompa rimanga invariata possiamo esprimere $\Delta p_{pump} = P/Q_P$ con Q_P portata che attraversa il ramo con pompa ed equagliando le equazioni 49 e 50 si possono esprimere le portate che circolano nel parallelo come:

$$Q_P = \frac{P}{kL_{12}v_{1V2}^{1.75}} = \frac{0.5112}{v_{1V2}^{1.75}} \quad (L = 1000\ m) \tag{51}$$

e

$$Q_{1V2} = \frac{\pi D^2}{4}v_{1V2} = 0.0113v_{1V2} \tag{52}$$

Queste due portate sono uguali se $v_{1V2} = 4\ m/s$. Se v_{1V2} è maggiore, $Q_{1V2} > Q_P$. Utilizzando questa informazione per scrivere l'equazione di continuità al nodo si ha che:

$$Q_{1V2} = Q_P + Q_{B2} \qquad \text{se} \ \ v_{1V2} > 4\ m/s \tag{53}$$

cioè viene trasferita portata da B ad A, mentre

$$Q_P = Q_{1V2} + Q_{2B} \qquad \text{se} \ \ v_{1V2} < 4\ m/s \tag{54}$$

e viene trasferita portata da A a B. Ipotizzando che $v_{1V2} > 4\ m/s$, l'equazione di continuità fornisce

$$Q_{B2} = Q_{1V2} - Q_P = \frac{\pi D^2}{4}v_{B2} \rightarrow v_{B2} = f(v_{12}) \tag{55}$$

e l'equazione di Bernoulli tra B ed A passando attraverso il ramo senza pompa ci dà :

$$\rho g(h_B - h_A) = k(L_{B2} + L_{1A})\rho v_{B2}^{1.75} + kL_{1V2}\rho v_{1V2}^{1.75} \tag{56}$$

dove il membro a destra è funzione solo di v_{1V2}. Se questa equazione non ha soluzione o risulta $v_{1V2} < 4$ bisogna riscrivere l'equazione di continuità come

$$Q_{B2} = Q_P - Q_{1V2} = \frac{\pi D^2}{4}v_{2B} \rightarrow v_{2B} = f(v_{1V2}) \tag{57}$$

e l'equazione di Bernoulli tra A ed B passando attraverso il ramo con la pompa ci dà :

$$\rho g(h_A - h_B) + \frac{P}{Q_P} = k(L_{B2} + L_{1A})\rho v_{2B}^{1.75} \tag{58}$$

dove sia Q_P che v_{2B} sono funzione di v_{1V2}. La risoluzione di questa equazione dovrebbe dare il valore numerico di v_{1V2}. Risolvendo numericamente si ricava $v_{1V2} = 3.3741\ m/s$, $v_Q = 5.38\ m/s$ e $v_{A1} = 2.01\ m/s$.

Quiando la valvola è più aperta e la lunghezza equivalente di perdita si riduce, cambia il valore soglia della velocità v_{1V2} per cui il flusso tra i serbatoi si inverte. Se $L = 100\ m$:

$$Q_P = \frac{P}{kL_{12}v_{1V2}^{1.75}} = \frac{5.112}{v_{1V2}^{1.75}} \quad (L = 100\ m) \tag{59}$$

e

$$Q_{1V2} = \frac{\pi D^2}{4} v_{1V2} = 0.0113 v_{1V2} \tag{60}$$

Le due portate sono uguali se $v_{1V2} = 9.2\ m/s$. Se v_{1V2} è maggiore, $Q_{1V2} > Q_P$. Di qui va seguita la stessa procedura del caso precedente. Quando la valvola è più aperta, a parità di differenza di pressione ai nodi del parallelo aumenta la quantità di fluido che attraversa la valvola e diventa più probabile che il flusso si muova da B ad A. Per $L_{1V2} = 100\ m$ risulta $v_{1V2} = 8.8624\ m/s$, $v_P = 9.93\ m/s$ e $v_{B2} = 1.07\ m/s$.

h.

---

1. Essendo note la portata ed il diametro della tubazione, la velocità nel ramo (a) è nota e pari a $v_a = 4Q/\pi D^2 = 2.23\ m/s$. Poichè deve essere $Q_B = Q_C$ e $D = cost$, la velocità nei rami (b) e (c) sarà $v_b = v_c = v_a/2 = 1.115\ m/s$. Poiché abbiamo fluido che si muove con la stessa velocità lungo i rami (b) e (c) in piano e di lunghezza diversa, le maggiori perdite si hanno nel tratto (c). Sul ramo (b) la valvola dovrà essere strozzata in modo da bilanciare la differenza di lunghezza del tubo ($L_{eq} = 7\ km$).

   Bernoulli scritto tra A e C fornisce:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A + \Delta p_{pump} = p_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \\ + \rho g h_C + 2 f_{AN} \frac{L_{AN}}{D} \rho v_{AN}^2 + 2 f_{NC} \frac{L_{NC}}{D} \rho v_{NC}^2$$

   che può essere semplificata essendo nulla la velocità nei serbatoi e uguale la pressione nei serbatoi. Applicando l'equazione di Blasius per tubi lisci si ricava $f_{AN} = 0.0032$, $f_{NC} = 0.0039$ e perdite viscose pari a $l_{v,AN} = 18.67 \cdot 10^5 Pa$ e $l_{v,NC} = 7.11 \cdot 10^5 Pa$ da cui la prevalenza della pompa risulta $\Delta p_{pump} = 25.78 \cdot 10^5 Pa$ e la potenza $P = 146.477\ kW$.

2. Indichiamo con D_1 il valore ottimo del diametro nel ramo (a) e con D_2 il valore ottimo del diametro nei rami (b) e (c). La prevalenza della pompa si ricava scrivendo Bernoulli tra A e C:

$$\Delta p_{pump} = 2 f_{AN} \frac{L_{AN}}{D_1} \rho v_{AN}^2 + 2 f_{NC} \frac{L_{NC}}{D_2} \rho v_{NC}^2 \tag{61}$$

   che può essere riscritta come

$$\Delta p_{pump} = \frac{K_A}{D_1^{4.75}} + \frac{K_C}{D_2^{4.75}} \tag{62}$$

   con $K_A = 549.72$ e $K_C = 204.29$. La potenza della pompa è $P = Q\Delta p_{pump}$. I costi annui d'impianto sono (1) costi per l'acquisto delle tubazioni, dati da:

$$C_T = \frac{k_t(D_1 L_{AN} + D_2(L_{NB} + L_{NC}))}{N_y} \tag{63}$$

   (2) costi per l'acquisto e l'esercizio della stazione di pompaggio, dati da:

$$C_P + C_E = \left(k_E N_h + \frac{k_p}{N_y}\right) \frac{Q}{10^3} \left(\frac{K_A}{D_1^{4.75}} + \frac{K_C}{D_2^{4.75}}\right) \tag{64}$$

   per cui il costo totale è funzione sia di D_1 che di D_2. Il minimo della funzione di 2 variabili si trova derivando la funzione rispetto ad ognuna delle variabili e uguagliando a zero:

$$\frac{\mathrm{d}C_{TOT}}{\mathrm{d}D_1} = \frac{k_t L_{AN}}{N_y} + \\ + \left(k_E N_h + \frac{k_p}{N_y}\right) \frac{Q}{10^3} K_A(-4.75) D_1^{-5.75} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}C_{TOT}}{\mathrm{d}D_2} = \frac{k_t(L_{NC} + L_{NB})}{N_y} + \\ + \left(k_E N_h + \frac{k_p}{N_y}\right) \frac{Q}{10^3} K_B(-4.75) D_2^{-5.75} = 0$$

   Dai calcoli si ricava $D_1 = 0.206\ m$ e $D_2 = 0.131\ m$.

i.

---

1. Quando la valvola V è chiusa, il flusso si muove dal serbatoio in pressione al serbatoio B. La portata volumetrica è $Q = w/\rho = 9.5 \cdot 10^{-3}\ m^3/s$ e la velocità nel tubo $v = 4Q/\pi D^2 = 1.21\ m/s$. Utilizzando Blasius per calcolare il fattore di attrito si ottiene $f = 0.0042$. Scrivendo Bernoulli tra A e B si ha:

$$p_0 + \rho g h_A = p_{atm} + 2f \frac{L_1 + L_2}{D} \rho v^2 \tag{65}$$

   da cui si può ricavare il valore di $p_0 = 1.147 \cdot 10^5\ Pa$.

2. Dalla conservazione della massa al nodo N si ha:

$$Q_{AN} = Q_{NC} + Q_{NB} = \frac{w_B + w_c}{\rho} = 0.0175\ m^3/s \tag{66}$$

   e nel tratto N-B la portata volumetrica e la velocità sono le stesse del punto precedente. Bernoulli tra N-B fornisce il valore di pressione al nodo N

$$p_N = p_{atm} + 2f \frac{L_2}{D} \rho v_{NB}^2 = 1.1969 \cdot 10^5\ Pa \tag{67}$$

Bernoulli tra N-C permette di ricavare il diametro della condotta

$$p_N = p_{atm} + \rho g h_c + 2f\frac{h_c}{D_{NC}}\rho v_{NC}^2 = \tag{68}$$

$$= p_{atm} + \rho g h_c + 20.079\left(\frac{4Q\rho}{\pi\mu}\right)^{-0.25}\left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2 h_c\rho D_{NC}^{-4.75} \tag{69}$$

che risulta $D_{NC} = 0.122\ m$. Nel tratto A-N si conosce la portata volumetrica $Q = 17.5\cdot 10^{-3}\ m^3/s$ e la velocità nel tubo $v = 4Q/\pi D^2 = 2.228\ m/s$. Utilizzando Blasius per calcolare il fattore di attrito si ottiene $f = 0.0036$. Bernoulli tra A-N permette di ricavare la pressione nel serbatoio:

$$p_0 + \rho g h_A = p_N + 2f\frac{L_1}{D}\rho v_{AN}^2 \tag{70}$$

che risulta $p_0 = 1.24\cdot 10^5\ Pa$.

j.

---

1. Noto il livello iniziale, h_0, e l'altezza dello sfioro, $\bar{h}$, il volume da riempire risulta:

$$V = \frac{\pi D^2}{4}\left(\bar{h} - h_0\right) = 5969 m^3 \tag{71}$$

Se lo sfioro non è attivo, la conservazione della massa applicata al serbatoio dà :

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \rho S\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \rho Q_{in} \tag{72}$$

dove S è la sezione del serbatoio. Integrando si ricava:

$$h(t) = h(0) + \frac{Q_{in}}{S}t \tag{73}$$

da cui

$$t = \frac{S(h(t) - h(o))}{Q_{in}} = \simeq 3h\ 18\ min \tag{74}$$

2. Quando è attivo il condotto di sfioro, l'equazione di conservazione della massa applicata al serbatoio fornisce:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \rho S\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \rho Q_{in} - \rho Q_{out} \tag{75}$$

e semplificando la densità

$$S\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = Q_0 - Q_{out} \tag{76}$$

Il livello è massimo quando è verificata la condizione $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = 0$ ovvero $Q_0 = Q_{out}$. Q_{out} è la portata uscente dallo sfioro che è funzione dell'altezza del liquido al di sopra del buco di sfioro. Bernoulli scritto tra il serbatoio e la sezione di uscita del liquido dà :

$$p_{atm} + \rho g h' = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_{out}^2 \tag{77}$$

da cui

$$v_{out} = \sqrt{2gh'} \tag{78}$$

che è la velocità di efflusso (di Torricelli). La portata uscente è

$$Q_{out} = f(h', d) = A_{sfioro}v_{out} = \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gh'} \tag{79}$$

che uguagliata a Q_0 fornisce la dipendenza cercata:

$$h' = 0.0207\frac{1}{d^4} \tag{80}$$

3. Dato il diametro del recinto, la massima distanza percorribile in direzione radiale dal getto in uscita risulta pari a $r = (D_m - D)/2 = 10\ m$. Ipotizzando che l'attrito dell'aria sul getto sia trascurabile, la distanza percorsa dal getto dipende dalla velocità di uscita e dal tempo di volo, cioè il tempo che il getto impiega per toccare il suolo. La velocità del getto è massima quando l'altezza sullo sfioro è massima, cioè alle condizioni di equilibrio, $h = h'$ quando $v_{out} = 4Q_0/\pi d^2$. Il moto del getto è uniforme in direzione radiale:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v_{out} \tag{81}$$

e uniformemente accelerato in direzione verticale:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = gt \tag{82}$$

Dalla componente verticale si ricava il massimo tempo di volo:

$$\overline{h} = \frac{1}{2}gt_{max}^2 \rightarrow t_{max} = \sqrt{2\overline{h}/g} \tag{83}$$

che dipende solo dall'altezza da cui esce il getto e che sostituito in 81 dà :

$$r = v_{out}t_{max} = 4Q_0/\pi d^2\sqrt{2\overline{h}/g} \tag{84}$$

ed esplicitando d si ricava

$$d = \sqrt{\frac{4Q_0}{\pi r}\sqrt{\frac{2\overline{h}}{g}}} = 0.358\ m \tag{85}$$

Questo è il diametro minimo, che corrisponde alla velocità massima per il getto. Qualsiasi diametro maggiore non farà fuoriuscire il getto dal recinto. Per questo diametro $h' = 1.25\ m$ e l'altezza di equilibrio del serbatoio è $\overline{h} + h' = 21.25\ m$. Per calcolare il tempo necessario per il riempimento della parte di volume compreso tra lo sfioro ed il livello di guardia $h* = 21\ m$ si utilizza ancora l'equazione di conservazione della massa sul serbatoio:

$$\frac{\pi D^2}{4}\frac{dh}{dt} = Q_0 - Q_{out} \tag{86}$$

con:

$$Q_{out} = \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2g(h-\overline{h})} \tag{87}$$

da cui separando le variabili

$$\frac{\mathrm{d}h}{\frac{4Q}{\pi D^2} - \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g(h-\overline{h})}} = \mathrm{d}t \tag{88}$$

che può essere integrata tra $\overline{h}$ e $h*$. Raggruppando e sostituendo i valori costanti si ha:

$$\frac{\mathrm{d}h}{a - b\sqrt{h-\overline{h}}} = \mathrm{d}t \tag{89}$$

che può essere integrata per sostituzione di variabili:

$$y = a - b\sqrt{h-\overline{h}} \tag{90}$$

$$\mathrm{d}y = -\frac{b\mathrm{d}h}{\sqrt{h-\overline{h}}} \tag{91}$$

da cui

$$\mathrm{d}h = -\frac{2(a-y)}{b^2}\mathrm{d}y \tag{92}$$

Sostituendo e integrando

$$-\frac{2(a-y)}{b^2}\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{2}{b^2}\left(\frac{a}{y} - 1\right)\mathrm{d}y = \mathrm{d}t \tag{93}$$

si ricava:

$$t = -\frac{2}{b^2}\left(a\ln\frac{y(t)}{y(0)} - (y(t) - y(0))\right) \tag{94}$$

da cui $t = 1858\ s \simeq 31\ min$.

k. ______________________

1. Per risolvere il problema impostiamo le equazioni di conservazione della massa per le due fasi presenti. Per l'aria è :

$$\frac{\mathrm{d}m_G}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \to m_G = nM = cost \tag{95}$$

perché il sistema è isolato. Dalla legge dei gas ideali è :

$$pV_G = nRT \to n = \frac{pV_G}{RT} = 12.89\ moli \tag{96}$$

dove V_G è il volume a disposizione del gas nel serbatoio, $V_G = \pi D^2(H - H_L)/4$, per cui la massa di gas presente è $m_G = nM = 373.99\ kg$. Quando l'olio inizia a uscire, il volume occupato dall'olio diminuisce mentre quello a liquia disposizione del gas aumenta. Dalla conservazione della massa:

$$p(0)V_G(0) = p(t)V_G(t)$$

$$\to p(0)(H - H_L(0)) = p(t)(H - H_L(t)) \tag{97}$$

da cui

$$p(t) = p(0)\frac{(H - H_L(0))}{(H - H_L(t))} \tag{98}$$

Per la conservazione della massa dell'olio si ha:

$$\frac{\mathrm{d}m_L}{\mathrm{d}t} = \rho_L\frac{\pi D^2}{4}\frac{\mathrm{d}H_L}{\mathrm{d}t} = -\rho_L\frac{\pi d^2}{4}v_{out} \tag{99}$$

dove d è il diametro del tubo e v_{out} è dato dall'equazione di Bernoulli scritta tra un punto nel serbatoio e la sezione di uscita del tubo:

$$p(t) + \rho_L g H_L(t) = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho_L v_{out}^2 + 2f\frac{L}{d}\rho_L v_{out}^2 \tag{100}$$

Quando si arresta l'olio è $v_{out} = 0$, perc cui da Bernoulli si ha:

$$p(t) = p_{atm} - \rho_L g H_L(t) \tag{101}$$

ed eguagliando alla 98 si ricava:

$$p(0)\frac{(H - H_L(0))}{(H - H_L(t))} = p_{atm} - \rho_L g H_L(t) \tag{102}$$

equazione quadratica in H_L da cui si può ricavare il valore dell'altezza di equilibrio $H_L = 4.124\ m$.

2. Per calcolare il tempo necessario per raggiungere il livello di equilibrio bisogna integrare l'equazione di conservazione della massa, sostituendo a v_{out} la velocità ottenuta da Bernoulli. Assumendo per semplicità di conoscere il valore f del fattore di attrito, da Bernoulli si ricava:

$$v_{out} = \left(\frac{p(t) + \rho_L g H_L(t) - p_{atm}}{\frac{1}{2}\rho_L + 2f\frac{L}{d}\rho_L}\right)^{0.5} \tag{103}$$

dove sostituendo per $p(t)$ il valore dato da 98 si ottiene $v_{out}(t) = f(H_L(t))$. Dalla conservazione della massa del liquido, separando le variabili e integrando (numericamente) si ottiene la funzione che descrive come varia il livello del liquido nel serbatoio nel tempo. Poiché il valore a cui si arresta l'olio corrisponde ad una condizione di equilibrio, questa sarà raggiunta asintoticamente nel tempo in un tempo infinito.